# Recueil d'Exercices et de Problèmes avec les Corrigés: Topographie, Astronomie, Géodésie et la Théorie des Moindres Carrés

## - Partie IV -

**Abdelmajid BEN HADJ SALEM**

*Résidence Bousten 8, Av. Mosquée Raoudha, Bloc B, 1181 Soukra-Raoudha, Tunisia.*

E-mail: abenhadjsalem@gmail.com

**Abstract:** This foor booklet includes the corrections of 60 exercises and problems of the following seven chapters: topography, astronomy, curves and the theory of surfaces, ellipse and ellipsoïd, geodetic systems, reduction of distances and the map projections.

**Résumé:** Dans ce fascicule, nous donnons dans la partie IV, les corrigés de 60 exercices et problèmes de ces sept chapitres suivants : la topographie, l'astronomie, les courbes et la théorie des surfaces, l'ellipse et l'ellipsoïde, les systèmes géodésiques, réduction des distances et les représentations planes.

**September 16, 2025**

ABDELMAJID BEN HADJ SALEM
**Résidence Bousten 8, Bloc B, Mosquée Er-Raoudha, 1181 Soukra Er-Raoudha**
**Tunisia.**
**E-mail :** abenhadjsalem@gmail.com

© September 2025 **Abdelmajid BEN HADJ SALEM**

A mes chers parents, à ma femme, à mes enfants, à ma petite-fille Rayhane.

A la Mémoire de mes Collègues et Amis Dr.Rached Boussemma, Dr. Chedly Fezzani, Noureddine Yangui, Jamel Zaiem, Abdelkader Sellal, Jalel Zid, Noureddine Hourrigue et Salah Laaribi.

# Table des matières

1 Préface 3

I Recueil des Exercices et des Problèmes 4

2 Topographie 5

3 Astronomie 6
3.1 Trigonométrie Sphérique . . . . . 6

4 Astronomie de Position 7

5 Courbes et Théorie des Surfaces 8
5.1 Courbes . . . . . 8
5.2 Théorie des surfaces . . . . . 9

6 Ellipse et Ellipsoïde de révolution 13
6.1 L'Ellipse et l'ellipsoïde de révolution . . . . . 13

7 Les Systèmes Géodésiques 18

8 Réductions des Distances 21

9 Les Représentations Planes 22
9.1 Les Représentations Planes . . . . . 22
9.2 La Représentation Lambert . . . . . 26
9.3 La Représentation UTM . . . . . 27

10 Les Transformations de Passage entre Les Systèmes Géodésiques 28
10.1 Les Transformations 2D de passage entre les Systèmes Géodésiques . . . . . 28
10.2 Les Transformations 3D de passage entre les Systèmes Géodésiques . . . . . 28

11 Géodésie Spatiale 29
11.1 Notions sur le Mouvement d'un Satellite Artificiel de la Terre . . . . . 29

12 Modèles Linéaires de Compensation 30

13 Modèles Non-Linéaires de Compensation 36

II Les Corrections 37

14 Topographie 38

15 Astronomie 39
15.1 Trigonométrie Sphérique . . . . . 39

16 Astronomie de Position 42

**17 Courbes et Théorie des Surfaces** **47**
17.1 **Courbes** . . . . . 47
17.2 **Théorie des surfaces** . . . . . 49

**18 Ellipse et Ellipsoïde** **61**
18.1 **L'Ellipse et l'ellipsoïde de révolution** . . . . . 61

**19 Les Systèmes Géodésiques** **80**

**20 Réductions des Distances** **88**

**21 Les Représentations Planes** **92**
21.1 **Les Représentations Planes** . . . . . 92
21.2 **La Représentation Lambert** . . . . . 108
21.3 **La Représentation UTM** . . . . . 111

**22 Bibliographie** **113**

# 1 Préface

J'ai souvent réçu des étudiants en géomatique des requêtes me demandant de leurs fournir la correction des exercices et des problèmes que j'ai publiés à travers mes différentes publications de géodésie, de topographie, d'astronomie ou encore concernant l'application de la théorie des moindres carrés. Aussi, je viens par ce quatrième fascicule répondre à leurs souhaits par la publication des corrigés de 60 exercices et problèmes de 7 chapitres. Le reste sera prochainement publié.

Les sept chapitres concernés sont :
1 - La Topographie (2).
2 - L'Astronomie (10).
3 - Les Courbes et la Théorie des Surfaces (12).
4 - Ellipse et Ellipsoïde (12).
5 - Les Systèmes Géodésiques (7).
6 - Réduction des Distances (3).
7 - Les Représentations Planes (14).

La première partie de ce quatrième fascicule contient les énnoncés des exercices et des problèmes, la deuxième partie concerne les corrections. Une bibliographie riche est ajoutée à la fin du document.

Enfin, pour signaler toute correction à cette publication, prière de nous écrire à l'adresse : abenhadjsalem@gmail.com, et je vous remercie d'avance.

Tunis,
16 Septembre 2025

***Abdelmajid***
***Ben Hadj Salem, Dipl.-Ing.***
***Ingénieur Général Géographe***

Première partie

# Recueil des Exercices et des Problèmes

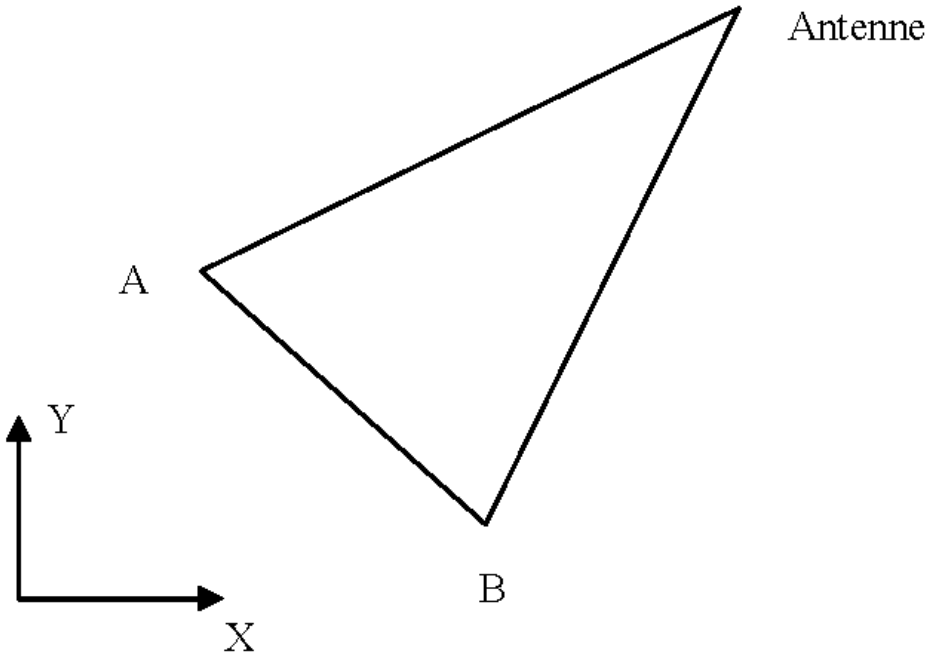



FIGURE 1 – Détermination de la hauteur de l'antenne

## 2 Topographie

**Exercice 1.** On veut calculer :

a - les coordonnées $X, Y$ et l'altitude $Z$ de la base d'une antenne de radio.

b - la hauteur $H$ de cette antenne, construite au sommet d'une colline (voir **Fig. 1**).

D'un point $A$, on a obtenu un angle zénithal de $88.3333\,gr$ avec une hauteur d'appareil de $1.37\,m$ en visant le sommet de l'antenne et d'un point $B$ un angle zénithal de $91.1111\,gr$ et une hauteur de l'appareil de $1.52\,m$ en visant la base de l'antenne. On a les données suivantes :

$$A(X_A = 30.48\,m, Y_A = 1219.20\,m, Z_A = 131.49\,m)$$
$$B(X_B = 259.08\,m, Y_B = 457.20\,m, Z_B = 108.77\,m)$$
$$\hat{A} = 73.3333\,gr \quad \hat{B} = 96.6667\,gr$$

**Exercice 2.** Vous travaillez avec un théodolite qui fournit les angles mesurés une seule fois avec une erreur moyenne quadratique $\alpha = 12\,dmgr$.

1. On mesure une distance $D$ de $100\,m$ en mode parallactique avec une stadia de longueur $l = 2\,m$, en mesurant l'angle parallactique $\alpha$ 4 fois. Quelle est l'erreur qudratique $\alpha_m$ de la moyenne en fonction de $\alpha$.

2. Démontrer que l'erreur moyenne quadratique sur la distance est donnée par :

$$D = \frac{l}{2}\left(1 + cotg^2\frac{\alpha_m}{2}\right)\alpha_m$$

3. Exprimer $D$ en fonction de $D, l$ et $\alpha_m$. Sachant que $D$ est égale à $101.53\,m$, calculer la valeur de $D$.

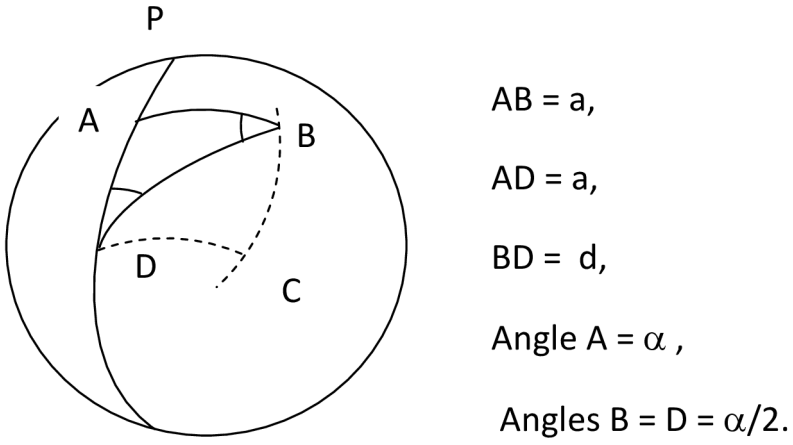



FIGURE 2 – Le carré sphérique

# 3 Astronomie

## 3.1 Trigonométrie Sphérique

**Exercice 3.** Calculer l'azimut d'une étoile $A$ de déclinaison $\delta = +5°$ quand sa distance zénithale est de 80° pour un observateur situé à la latitude $\varphi = 56°$.

**Exercice 4.** En appliquant au triangle de position les formules de trigonométrie sphérique, montrer que l'on peut calculer l'angle horaire $AH_c$ du coucher d'un astre $A$ par : $cosAH_c = -tg\varphi.tg\delta$.

**Exercice 5.** Soit un triangle sphérique $ABC$. On donne les éléments suivants :
- $\hat{A} = 80.1643\,3\,gr$,
- $\hat{B} = 55.7735\,1\,gr$,
- $\hat{C} = 64.0626\,1\,gr$,
- $AC = 20.1357\,km$,
- $AB = 22.1435\,km$.

1. Calculer $\alpha = \hat{A} + \hat{B} + \hat{C}$.
2. Déterminer $\epsilon$ l'excès sphérique de ce triangle.
3. Calculer la fermeture du triangle $ABC$, donnée par :

$$f = \alpha - 200.0000\,0\,gr - \epsilon$$

**Exercice 6.** Soit $(\mathbb{S}^2)$ une sphère de rayon égal à 1. Soit un carré sphérique $ABCD$ de côté $a$ (arc de grand cercle). On note $\alpha = \hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D}$.
1. Montrer que :

$$cosa = cotg^2\frac{\alpha}{2}$$

2. Donner l'expression de la diagonale $d =$ l'arc $BD$.

**Problème 7.** Soit $(\mathbb{S}^2)$ une sphère de rayon égal à 1 et de centre le point $\Omega$. Un point $M$ de $(\mathbb{S}^2)$ a pour coordonnées $(\varphi, \lambda)$. On appelle les coordonnées de Cassini-Soldner [1] [2] de $M$ les angles (voir **Fig. 10**) :

1. César-François Cassini (1714-1784) : Astronome et géodésien français.
2. Dr Johann Georg von Soldner (1776-1833) : Mathématicien et astronome bavarois.

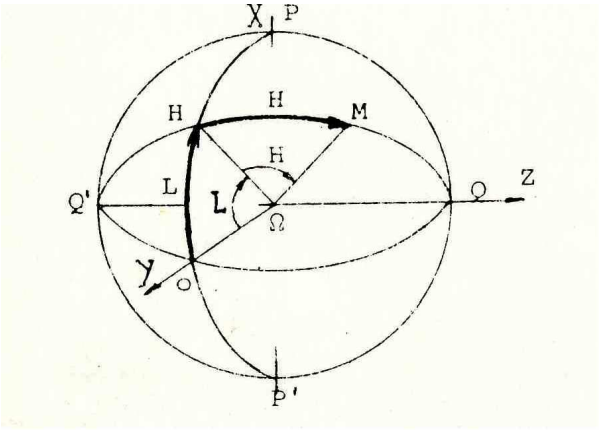



FIGURE 3 – Les coordonnées de Cassini-Soldner

- $L = \widehat{\Omega O, \Omega H}$,
- $H = \widehat{\Omega H, \Omega M}$.

1. Déterminer les relations liant $L, H$ à $\varphi, \lambda$.
2. Inversement, donner les relations liant $\varphi, \lambda$ à $L, H$.

**Problème 8.** Au lieu $M$ de latitude $\varphi = 38°$ Nord, on observe l'étoile polaire $A$ de déclinaison $\delta = +89°$ et d'ascension droite $\alpha = +2h\,13\,mn\,52.90\,s$.
1. Donner sur un graphique, les éléments du triangle sphérique $PAM$ où $P$ est le pôle Nord.
2. Sachant que l'heure sidérale locale $HSL$ est égale au moment de l'observation à $6h\,37\,mn\,19.72s$, calculer l'angle horaire $AH$.
3. En appliquant la formule des cotangentes, montrer que l'azimut $Az$ de l'étoile est donné par la formule :

$$tgAz = \frac{sinAH}{cosAHsin\varphi - cos\varphi tg\delta}$$

4. Calculer alors l'azimut $Az$.
5. Calculer la distance zénithale $z$ de l'étoile.

# 4 Astronomie de Position

**Exercice 9.** Au lieu de latitude $\varphi = 36°54'$ Nord, on veut calculer les hauteurs $h_1$ et $h_2$ de l'étoile polaire de déclinaison $\delta = +89°$ respectivement à son passage supérieur et à son passage inférieur au méridien du lieu.
1 Déterminer $h_1$ et $h_2$.

**Problème 10.** 1. En un lieu de latitude $\varphi$ quelles sont les étoiles :
- qui ne se couchent pas ( qui sont toujours visibles),
- qui ne sont jamais visibles.

Traiter le cas : lieu dans l'hémisphère nord.
2. Quelle est la condition pour qu'une étoile culmine au zénith ?
3. Cas particulier du soleil : la déclinaison du soleil varie de $-23°27'$ à $+23°27'$ au cours de l'année. On appelle jour le moment pendant lequel le soleil est au-dessus de l'horizon, nuit lorsque le soleil est au-dessous de l'horizon, midi l'instant de la culmination, minuit l'instant du passage inférieur.
a) Montrer qu'au moment des équinoxes le jour et la nuit sont d'égale durée quel que soit le lieu.

b) Montrer qu'à l'équateur, quelle que soit la date le jour et la nuit sont d'égale durée.

**Problème 11.** Une station astronomique est située en un lieu de coordonnées géographiques : $\varphi = +45^\circ\,00'$; $\lambda = +7h\,20\,mn$.

En ce lieu, on observe une étoile $A$ de coordonnées équatoriales :

$\alpha = +11h\,13\,mn$; $\delta = 30^\circ\,00'$.

L'observation se fait le jour de l'équinoxe de printemps le 21 mars à 0 heure $TU$. L'heure sidérale de Greenwich est $11h\,52\,mn$.

1. Calculer l'heure sidérale locale du lever et du coucher de l'étoile $A$ au lieu considéré.
2. En déduire l'heure $TU$ du lever et du coucher de l'étoile au lieu considéré.

Remarque : on choisira le coucher qui a lieu après le lever.

**Problème 12.** En un lieu de latitude $43^\circ,521$ et de longitude $+0h\,20\,mn\,57\,s$, on cherche à pointer la galaxie d'Andromède de coordonnées équatoriales $\alpha = 0h\,40\,mn$, $\delta = 41^\circ\,00'$ le 31 juillet 1992 à $21h\,TU$.

On donne l'heure sidérale de Greenwich à $0h\,TU$ le 31/07/1992 : $HSG_{0hTU} = 20h\,35\,mn\,28\,s$.

1. Calculer l'heure sidérale locale à $21h\,TU$.
2. En déduire l'angle horaire de la galaxie.
3. Calculer la distance zénithale de la galaxie à $21h\,TU$.
4. Calculer son azimut à cette même heure.

# 5 Courbes et Théorie des Surfaces

## 5.1 Courbes

**Exercice 13.** Soit l'hélice circulaire $\Gamma$ paramétrée par :

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \\ z = bt \end{cases}$$

où $a, b$ deux constantes positives.

1. Exprimer les composantes des vecteurs $T, N, B$ du repère de Frenêt.
2. Montrer que la courbure vaut $\dfrac{a}{a^2+b^2}$.
3. Montrer que la torsion vaut $\dfrac{b}{a^2+b^2}$.

**Exercice 14.** Soit la courbe $(C)$ définie par les formules :

$$M \begin{cases} x = at^2 \\ y = at^3 \\ z = \dfrac{9}{16}at^4 \end{cases} \quad \text{avec} \quad a > 0$$

1. Calculer l'abscisse curviligne $s$ d'un point $M$ quelconque de cette courbe lorsqu'on prend pour origine des arcs l'origine des coordonnées et qu'on prend pour sens des arcs croissants celui des $y$ croissants.
2. Déterminer au point $M$ les vecteurs unitaires du trièdre de Frenêt.
3. Calculer le rayon de courbure et les coordonnées du centre de courbure.
4. Evaluer la torsion en $M$.

## 5.2 Théorie des surfaces

**Exercice 15.** Soit $(\Gamma)$ la surface paramétrée par $(u,v)$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que :

$$M(u,v)\begin{cases} X = u(1-u^2)cosv \\ Y = u(1-u^2)sinv \\ Z = 1-u^2 \end{cases}$$

1. Calculer l'expression de $ds^2$.
2. Montrer que l'équation cartésienne de $(\Gamma)$ est :

$$x^2+y^2=(1-z)z^2$$

**Exercice 16.** Soit la surface d'Enneper :

$$M(u,v)\begin{cases} X = u-\dfrac{u^3}{3}+uv^2 \\ Y = v-\dfrac{v^3}{3}+vu^2 \\ Z = u^2-v^2 \end{cases}$$

1. Montrer que :
$$ds^2=(1+u^2+v^2)^2.(du^2+dv^2)$$
2. Calculer un vecteur unitaire normal à la surface.
3. Montrer que la surface d'Enneper est de courbure moyenne nulle en chaque point.

**Exercice 17.** On suppose que la métrique d'une surface donnée est :

$$ds^2=A^2du^2+B^2dv^2,\quad A=A(u,v),\quad B=B(u,v)$$

1. Montrer alors que l'expression de la courbure totale est :

$$K=-\frac{1}{AB}\left[\left(\frac{A'_v}{B}\right)'_v+\left(\frac{B'_u}{A}\right)'_u\right]$$

$'$ désigne la dérivation partielle.

**Problème 18.** On définit une surface $(S)$ par les équations :

$$M(u,v)\begin{cases} X = u^2+v \\ Y = u+v^2 \\ Z = uv \end{cases}$$

1. Calculer les composantes des vecteurs $\boldsymbol{OM}'_u$ et $\boldsymbol{OM}'_v$.
2. Calculer les coefficients $E,F,G$ de la première forme fondamentale de la surface $(S)$.
3. En déduire l'expression de $ds^2$.
4. Les coordonnées $(u,v)$ sont-elles orthogonales ? symétriques ?
5. Calculer un vecteur normal de $(S)$.

**Problème 19.** On définit une surface $(\Sigma)$ par les équations :

$$M(u,v)\begin{cases} X = a.cosu.cosv \\ Y = a.cosu.sinv \\ Z = b.sinu \end{cases}$$

avec $a,b$ deux constantes positives.

1. Calculer les composantes des vecteurs $\boldsymbol{OM}'_u$ et $\boldsymbol{OM}'_v$.
2. Calculer les coefficients $E, F, G$ de la première forme fondamentale de la surface $(\Sigma)$.
3. En déduire l'expression de $ds^2$.
4. Les coordonnées $(u, v)$ sont-elles orthogonales ? symétriques ?
5. Calculer un vecteur unitaire normal $\boldsymbol{n}$ de $(\Sigma)$.
6. Calculer les vecteurs :

$$\boldsymbol{OM}''_{uu}, \quad \boldsymbol{OM}''_{uv}, \quad \boldsymbol{OM}''_{vv}$$

On pose :

$$L = \boldsymbol{n}.\boldsymbol{OM}''_{uu}, \quad M = \boldsymbol{n}.\boldsymbol{OM}''_{uv}, \quad N = \boldsymbol{n}.\boldsymbol{OM}''_{vv}$$

7. Calculer les coefficients $L, M$ et $N$.

**Problème 20.** On considère la surface $(\Gamma)$ définie par les équations :

$$M(u,v)\begin{cases} X = sinu.cosv \\ Y = sinu.sinv \\ Z = cosu + Logtg\dfrac{u}{2} + \psi(v) \end{cases}$$

avec $\psi(v)$ est une fonction définie de classe $C^1$ de $v$.
1. Donner le domaine de définition de la surface $(\Gamma)$.
2. Montrer que les courbes coordonnées $v = constante$ constituent une famille de courbes planes de $(\Gamma)$ et que leur plan coupe $(\Gamma)$ sous un angle constant.
3. Calculer les composantes des vecteurs $\boldsymbol{OM}'_u$ et $\boldsymbol{OM}'_v$.
4. Calculer les coefficients $E, F, G$ de la première forme fondamentale de la surface $(\Gamma)$.
5. En déduire l'expression de $ds^2$.
6. Les coordonnées $(u, v)$ sont-elles orthogonales ? symétriques ?
7. On suppose pour la suite que $\psi(v) = 0$, calculer un vecteur unitaire normal $\boldsymbol{n}$ de $\Gamma$.
8. Calculer les vecteurs :

$$\boldsymbol{OM}''_{uu}, \quad \boldsymbol{OM}''_{uv}, \quad \boldsymbol{OM}''_{vv}$$

On pose :

$$L = \boldsymbol{n}.\boldsymbol{OM}''_{uu}, \quad M = \boldsymbol{n}.\boldsymbol{OM}''_{uv}, \quad N = \boldsymbol{n}.\boldsymbol{OM}''_{vv}$$

9. Calculer les coefficients $L, M$ et $N$.
10. En déduire l'expression des courbures moyenne et totale.

**Problème 21.** Soit la surface $(\Gamma)$ définie paramétriquement par :

$$M(u,v)\begin{cases} X = thu.cosv \\ Y = thu.sinv \\ Z = \dfrac{1}{chu} + Logth\dfrac{u}{2} \end{cases}$$

avec $chu$ et $thu$ sont respectivement le cosinus et la tangente hyperboliques définies par :

$$chu = \frac{e^u + e^{-u}}{2}, \quad thu = \frac{e^u + e^{-u}}{e^u - e^{-u}}$$

1. Donner le domaine de définition de la surface $(\Gamma)$.
2. Calculer les composantes des vecteurs $\boldsymbol{OM}'_u$ et $\boldsymbol{OM}'_v$.
3. Calculer les coefficients $E, F, G$ de la première forme fondamentale de la surface $(\Gamma)$.
4. En déduire l'expression de $ds^2$.
5. Les coordonnées $(u, v)$ sont-elles orthogonales ? symétriques ?
6. Calculer un vecteur unitaire normal $\boldsymbol{n}$ de $(\Gamma)$.
7. Calculer les vecteurs :

$$\boldsymbol{OM}''_{uu}, \quad \boldsymbol{OM}''_{uv}, \quad \boldsymbol{OM}''_{vv}$$

On pose :

$$L = \boldsymbol{n}.\boldsymbol{OM}''_{uu}, \quad M = \boldsymbol{n}.\boldsymbol{OM}''_{uv}, \quad N = \boldsymbol{n}.\boldsymbol{OM}''_{vv}$$

8. Calculer les coefficients $L, M$ et $N$.
9. Déterminer les coubures moyenne et totale.

**Problème 22.** 1. Montrer que les courbures totale $K$ et moyenne $H$ en un point $M(x,y,z)$ d'une surface paramétrée par $z = f(x,y)$, où $f$ est une fonction lisse, sont données par :

$$K = \frac{f''_{xx}f''_{yy} - f''^2_{xy}}{(1+f'^2_x + f'^2_y)^2}$$

et :

$$H = \frac{(1+f'^2_x)f''_{xx} - 2f'_x f'_y f''_{xy} + (1+f'^2_x)f''_{yy}}{(1+f'^2_x + f'^2_y)^{\frac{3}{2}}}$$

**Problème 23.** Soit $(\Sigma)$ une surface de $\mathbb{R}^3$ paramétrée par $OM(u,v)$ telle que sa première forme fondamentale s'écrit : $ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$
1. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

i) - $\dfrac{\partial E}{\partial v} = \dfrac{\partial G}{\partial u} = 0$,

ii) - Le vecteur $\dfrac{\partial^2 OM}{\partial u \partial v}$ est parallèle au vecteur normal $N$ à la surface,

iii) - Les côtés opposés de tout quadrilatère curviligne formés par les courbes coordonnées $(u,v)$ ont même longueurs.

2. Quand ces conditions sont satisfaites, on dit que les courbes coordonnées de $(\Sigma)$ forment un réseau de *Tchebychev*.[3] Montrer que dans ce cas, on peut paramétrer la surface par $(\tilde{u},\tilde{v})$ telle que $ds^2$ s'écrit :

$$ds^2 = d\tilde{u}^2 + 2cos\theta d\tilde{u}d\tilde{v} + d\tilde{v}^2$$

où $\theta$ est une fonction de $(\tilde{u},\tilde{v})$. Montrer que $\theta$ est l'angle entre les courbes coordonnées $\tilde{u},\tilde{v}$.
3. On pose les deux déterminants ci-dessous :

$$A = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2}E_{vv} + F_{uv} - \frac{1}{2}G_{uu} & \frac{1}{2}E_u & F_u - \frac{1}{2}E_v \\ F_v - \frac{1}{2}G_u & E & F \\ \frac{1}{2}G_v & F & G \end{vmatrix}$$

$$B = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2}E_v & \frac{1}{2}G_u \\ -\frac{1}{2}E_v & E & F \\ \frac{1}{2}G_u & F & G \end{vmatrix}$$

En plus de la formule de $K$ utilisée dans des problèmes précédents, on montre que la courbure totale $K$ est donnée par cette formule (A. Pressley, 2010) :

$$K = \frac{A-B}{(EG-F^2)^2}$$

Montrer que :

$$K = -\frac{1}{sin\theta}.\frac{\partial^2\theta}{\partial\tilde{u}\partial\tilde{v}}$$

4. On pose :

$$\hat{u} = \tilde{u} + \tilde{v}$$
$$\hat{v} = \tilde{u} - \tilde{v}$$

3. Pafnouti Tchebychev (1821 - 1894 ) : Mathématicien russe.

Montrer que $ds^2$ s'écrit avec les nouvelles variables $(\hat{u},\hat{v})$ :

$$ds^2 = cos^2\omega d\hat{u}^2 + sin^2\omega d\hat{v}^2$$

avec $\omega = \theta/2$. (*A.N. Pressley*, 2010)

**Problème 24.** Soit $(\mathcal{F})$ une surface définie dans $\mathbb{R}^3$, paramétrée par la fonction vectorielle $\boldsymbol{OM} = S(u,v)$ telle que :

$$S(u,v)\left|\begin{array}{l} x = f(u,v) \\ y = g(u,v) \\ z = h(u,v) \end{array}\right.$$

$S$ est dite une paramétrisation conforme de $(\mathcal{F})$ si on a les deux conditions suivantes :

$$\frac{\partial S}{\partial u}.\frac{\partial S}{\partial u} = \frac{\partial S}{\partial v}.\frac{\partial S}{\partial v} = e^{\Phi(u,v)} \quad et \quad \frac{\partial S}{\partial u}.\frac{\partial S}{\partial v} = 0$$

1. Ecrire la première forme fondamentale de $(\mathcal{F})$.
2. Soit $n$ Le vecteur normal unitaire.

$$n = \frac{\dfrac{\partial S}{\partial u} \wedge \dfrac{\partial S}{\partial v}}{\left\| \dfrac{\partial S}{\partial u} \wedge \dfrac{\partial S}{\partial v} \right\|}$$

Quand le point $M$ varie sur la surface $(\mathcal{F})$, le repère $(\frac{\partial S}{\partial u}, \frac{\partial S}{\partial v}, n)$ est un repère mobile. La deuxième forme fondamentale de $(\mathcal{F})$ est définie par :

$$n.d^2S = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$$

Si cette deuxième forme fondamentale s'écrit sous la forme :

$$-n.d^2S = e^{\Phi(u,v)}\left(\frac{du^2}{\rho_1} + \frac{dv^2}{\rho_2}\right)$$

Donnez l'expression de $\Phi(u,v)$. Alors, la paramétrisation de $(\mathcal{F})$ est dite isotherme. Dans ce cas, $\rho_1, \rho_2$ sont les rayons de courbure principaux de la surface $(\mathcal{F})$. Une surface qui admet des coordonnées isothermes est dite isotherme.

On considère que $(\mathcal{F})$ est la sphère définie par :$S = \left|\begin{array}{l} x = Rcos\varphi cos\lambda \\ y = Rcos\varphi sin\lambda \quad R > 0 \\ z = Rsin\varphi \end{array}\right.$

Soit $\mathcal{L}_M$ la variable de Mercator. Montrer que la sphère paramétrée par $(\mathcal{L}_M, \lambda)$ est une surface isotherme.

3. On considère $\mathcal{B}$ la base du repère mobile $(\frac{\partial S}{\partial \mathcal{L}_M}, \frac{\partial S}{\partial \lambda}, n)$. On prendra $u = \mathcal{L}_M, v = \lambda)$. Montrer par le calcul que les vecteurs de la base $\mathcal{B}$ $(\frac{\partial S}{\partial \mathcal{L}_M}, \frac{\partial S}{\partial \lambda}, n)$ vérifient les deux équations matricielles ci-dessous. Ces deux expressions sont appellées les équations de Gauss-Weingarten :

$$\frac{\partial}{\partial u}\begin{pmatrix} S'_u \\ S'_v \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\Phi'_u}{2} & \frac{-\Phi'_v}{2} & -\frac{e^{\Phi}}{\rho_1} \\ \frac{\Phi'_v}{2} & \frac{\Phi'_u}{2} & 0 \\ \frac{1}{\rho_1} & 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} S'_u \\ S'_v \\ n \end{pmatrix}$$

et :

$$\frac{\partial}{\partial v}\begin{pmatrix} S'_u \\ S'_v \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\Phi'_v}{2} & \frac{\Phi'_u}{2} & 0 \\ -\frac{\Phi'_u}{2} & \frac{\Phi'_v}{2} & -\frac{e^{\Phi}}{\rho_2} \\ 0 & \frac{1}{\rho_2} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} S'_u \\ S'_v \\ n \end{pmatrix}$$

[4]

# 6 Ellipse et Ellipsoïde de révolution

## 6.1 L'Ellipse et l'ellipsoïde de révolution

**Exercice 25.** 1. Calculer les composantes du vecteur normal extérieur à l'ellipse, en déduire les relations (dans les deux sens) entre les lignes trigonométriques de $\varphi$ et celles de $\psi$.
2. Donner les équations paramétriques de l'ellipse et de l'ellipsoïde en fonction, repectivement, de $\varphi$ et de $\lambda$ et $\varphi$.
3. Etablir une relation différentielle entre $\psi$ et $\varphi$.
4. Calculer la différentielle $d\beta$ de l'arc d'ellipse en fonction de $\varphi$, puis la première forme quadratique de l'ellipsoïde.
5. Calculer les courbures principales de l'ellipsoïde de révolution.
6. Trouver la coordonnée curviligne de l'ellipsoïde de révolution qui forme avec la longitude un couple de coordonnées symétriques et qui s'annulle le long de l'équateur.

**Exercice 26.** Soit à calculer :

$$W_{2p} = \int_0^{\Omega} sin^{2p}\omega d\omega$$

On pose :

$$I_{p-2}(\Omega) = \int_0^{\Omega} sin^{p-2}\omega cos^2\omega d\omega$$

1. Etablir les formules suivantes :

$$W_p = W_{p-2} - I_{p-2}$$
$$(p-1)I_{p-2} = sin^{p-1}\Omega cos\Omega + W_p$$
$$W_p = \frac{p-1}{p}W_{p-2} - \frac{1}{p}sin^{p-1}\Omega cos\Omega$$

2. Préciser la valeur de $W_0$, et proposer un programme (en Matlab) de calcul de $W_{2p}$.

**Exercice 27.** On a :

$$\beta(\varphi) = \int_0^{\varphi} \rho d\varphi$$

avec :

$$\rho = \frac{a(1-e^2)}{w^3}, \quad w^2 = 1 - e^2 sin^2\varphi$$

1. Développer $w^{-3}$ suivant les puissances croissantes de $esin\varphi$.

4. **Julius Weingarten** (1836 - 1910) : mathématicien allemand.

2. Calculer $\beta(\varphi)$ en fonction des $W_{2p}(\varphi)$.
3. Majorer l'erreur de calcul, lorsqu'on arrête le développement au terme $e^{2n}$. Calculer $n$ si l'on recherche la précision du millimètre sur $\beta$, quelle que soit la latitude $\varphi$ entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$.
4. Proposer un organigramme de calcul.
5. Envisager la solution du problème inverse : calcul de $\varphi$ connaissant $\beta$.

**Problème 28.** Soit l'ellipse $(E)$ définie par les équations paramétriques :

$$M\begin{cases} x = acosu \\ y = bsinu \\ \text{avec} \quad a > b > 0 \end{cases}$$

On pose :

$$e^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2}; \quad e'^2 = \frac{a^2-b^2}{b^2}$$

1. Calculer la position sur l'axe des abscisses des deux points $F$ et $F'$ appelés foyers tels que $MF+MF' = 2a$.
2. Montrer que le produit des distances des foyers à la tangente à l'ellipse en M est indépendant de $u$.
3. Donner l'expression de $ds$.
4. Déterminer les expressions des vecteurs unitaires $\boldsymbol{T}$ et $\boldsymbol{N}$ et en déduire le rayon de coubure de l'ellipse.
5. Montrer qu'il passe par $M$ deux cercles tangents en ce point à la courbe et centrés sur $Ox, Oy$ respectivement (appelés cercles surosculateurs).
6. Que deviennent ces cercles lorsque $M$ est un sommet de l'ellipse.

**Exercice 29.** 1. A partir de la définition géométrique de l'ellipse donnée par :

$$MF + MF' = constante = 2a$$

retrouver l'expression de l'équation cartésienne de l'ellipse.

**Exercice 30.** 1. Montrer la formule très utilisée en géodésie :

$$\frac{d(Ncos\varphi)}{d\varphi} = -\rho sin\varphi$$

avec $N$ et $\rho$ les deux rayons de courbures principaux de l'ellipsoïde de révolution donnés respectivement par :

$$N = \frac{a}{\sqrt{1-e^2sin^2\varphi}}$$

et :

$$\rho = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2sin^2\varphi)\sqrt{1-e^2sin^2\varphi}}$$

**Problème 31.** A partir des équations de l'ellipsoïde de révolution :

$$M = \begin{cases} X = Ncos\varphi cos\lambda \\ Y = Ncos\varphi sin\lambda \\ Z = N(1-e^2)sin\varphi \end{cases}$$

1. Calculer les vecteurs :

$$\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial \lambda}, \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial \varphi}$$

2. Calculer les coefficients :

$$E = \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial \lambda}.\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial \lambda}, \quad F = \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial \lambda}.\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial \varphi}, \quad G = \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial \varphi}.\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial \varphi}$$

3. Démontrer que l'expression de la première forme fondamentale s'écrit :

$$ds^2 = \rho^2 d\varphi^2 + N^2 cos^2\varphi d\lambda^2$$

4. Calculer le vecteur normal $\boldsymbol{n}$ :

$$\boldsymbol{n} = \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial \lambda} \wedge \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial \varphi} \frac{1}{\left\| \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial \lambda} \wedge \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial \varphi} \right\|}$$

5. Calculer les vecteurs :

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{M}}{\partial \lambda^2}, \quad \frac{\partial^2 \boldsymbol{M}}{\partial \lambda \partial \varphi}, \quad \frac{\partial^2 \boldsymbol{M}}{\partial \varphi^2}$$

6. Déterminer les coefficients :

$$L = n.\frac{\partial^2 \boldsymbol{M}}{\partial \lambda^2}, \quad M = n.\frac{\partial^2 \boldsymbol{M}}{\partial \lambda \partial \varphi}, \quad N = n.\frac{\partial^2 \boldsymbol{M}}{\partial^2 \varphi}$$

7. Ecrire la deuxième forme fondamentale $\Phi(\lambda, \varphi)$.
8. En appliquant la formule du cours, Montrer que :

$$N(\varphi) = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 sin^2\varphi}}$$

est le rayon de courbure de la section normale au point $M$ perpendiculaire au plan de la méridienne de l'ellipsoïde de révolution.
9. En posant :

$$d\mathcal{L} = \frac{\rho d\varphi}{N cos\varphi}$$

En déduire que $ds^2$ s'écrit :

$$ds^2 = N^2 cos^2\varphi (d\mathcal{L}^2 + d\lambda^2)$$

10. Montrer que $\mathcal{L}$ est donnée par :

$$\mathcal{L}(\varphi) = Log\left(tg(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2})\right) - \frac{e}{2} Log\left(\frac{1 + esin\varphi}{1 - esin\varphi}\right)$$

**Problème 32.** Sur l'ellipsoïde, on note $\varphi$ la latitude géodésique et $\psi$ la latitude réduite.
1. Calculer $\rho$ le rayon de courbure de l'ellipse méridienne en fonction de $\psi$.
2. Exprimer l'aplatissement de l'ellipsoïde en fonction des valeurs de $\rho$ au pôle et à l'équateur.
3. On mesure la longueur d'un arc de méridien d'un degré à la fois au pôle et à l'équateur. On trouve respectivement 111 695 $m$ et 110 573 $m$. En déduire l'aplatissement.

**Problème 33.** On donne les coordonnées tridimensionnelles suivantes d'un point $M$ :

$$M = (X, Y, Z) = (4\,300\,244.860\,m, 1\,062\,094.681\,m, 4\,574\,775.629\,m)$$

Les paramètres de l'ellipsoïde de référence sont $a = 6\,378\,137.00\,m, \quad e^2 = 0.006\,694\,38$.
1. Calculer le demi-petit axe $b$.
2. Calculer l'aplatissement.
3. Calculer les coordonnées géodésiques $(\varphi, \lambda, he)$ du point $M$. $\varphi$ et $\lambda$ seront calculées en grades avec cinq chiffres après la virgule.

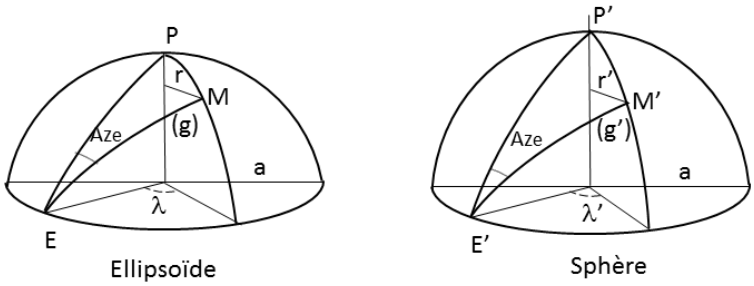



FIGURE 4 – La Correspondance de la sphère de Jacobi

**Problème 34.** Soit $\mathcal{E}(a,e)$ un ellipsoïde de révolution où $a,e$ sont respectivement le demi-grand axe et la première excentricité. $(g)$ une géodésique partant d'un point $E(\varphi=0,\lambda_E)$ sur l'équateur et d'azimut $Az_E$. A cette géodésique, on lui fait correspondre une géodésique $(g')$ sur la sphère $\mathcal{S}^2$ dite de Jacobi [5] de rayon $a$, ayant le même azimut $Az_E$ au point $E'(\varphi'=0,\lambda_E)$. De même au point $M(\varphi,\lambda)$ de la géodésique $(g)$ de l'ellipsoïde, on lui fait correspondre le point $M'(\varphi',\lambda')$ de $(g')$ de $\mathcal{S}^2$ tel qu'il y a conservation des azimuts.

1. Ecrire l'équation de Clairaut pour la géodésique $(g)$.
2. On note $r'$ le rayon du parallèle passant par $M'$ de la géodésique $(g')$. Ecrire de même l'équation de Clairaut pour la géodésique $(g')$.
3. Montrer que $\varphi$ et $\varphi'$ vérifient :

$$N cos\varphi = a cos\varphi'$$

et en déduire que $\varphi'$ est la latitude paramétrique de $M$.

4. Ecrire les expressions de $tgAz_g$ et $tgAz_{g'}$ respectivement sur $(g)$ et $(g')$.
5. Montrer que :

$$d\lambda = \frac{\rho d\varphi}{a d\varphi'} d\lambda'$$

En déduire que :

$$d\lambda = \sqrt{1-e^2 cos^2\varphi'}\, d\lambda'$$

6. En intégrant l'équation précédente, montrer qu'on obtient :

$$\lambda - \lambda_E = \int_{\lambda_E}^{\lambda'+\lambda_E} \sqrt{1-e^2 cos^2\varphi'}\, d\lambda'$$

avec $\lambda > \lambda_E$ et $\lambda'$ est comptée à partir de $\lambda_E$.

7. En écrivant $\sqrt{1-e^2 cos^2\varphi'} = 1 - \frac{e^2}{2} cos^2\varphi' + o(e^4)$ où $o(e^4)$ est un infiniment petit d'ordre 4 en $e$ dont on néglige, écrire l'intégrale précédente entre $\lambda_E$ et $\lambda_E + \lambda$.
8. Comme $(g')$ est une géodésique de la sphère, on démontre que :

$$cos^2\varphi' d\lambda' = \frac{sinAz_E}{a} ds'$$

où $ds'$ est l'élément différentiel de l'abscisse curviligne sur la géodésique (un grand cercle). Alors en posant $s'=0$ au point $E'$, montrer que l'équation précédente s'écrit sous la forme :

$$\lambda = \lambda_E + \lambda' - \frac{e^2 sinAz_e}{2a} \int_0^{s'} ds'$$

5. Carl Gustav Jacob Jacobi (1804-1851) : Mathématicien allemand.

9. On suppose que la géodésique $(g')$ coupe une première fois le plan de l'équateur en un point $F'$, montrer qu'on obtient :

$$\lambda'_F = \pi$$
$$s' = \pi a$$
$$\lambda_F = \lambda_E + \pi - \frac{e^2 \pi sinAz_E}{2}$$

10. La géodésique $(g')$ partant de $F'$ a pour azimut $\pi - Az_E$, elle coupe une deuxième fois l'équateur au point $E'$, mais la géodésique $(g)$ sur l'ellipsoïde coupe une deuxième fois le plan de l'équateur au point correspondant à $H$ dont la longitude est $\lambda_H$. Montrer que $\lambda_H$ est donnée par :

$$\lambda_H = \lambda_E + 2\pi - \frac{e^2 \pi sinAz_E}{2} - \frac{e^2 \pi sin(\pi - Az_E)}{2} = \lambda_E + 2\pi - e^2 \pi sinAz_E$$

Quelle conclusion a-t-on sur les lignes géodésiques de l'ellipsoïde de révolution.

**Problème 35.** Un point $M$ de la surface d'une sphère $(S)$ de rayon $R$, a pour coordonnées $(X, Y, Z)$ dans un repère orthonormé :

$$M = (X, Y, Z) = (Rcos\varphi.cos\lambda, Rcos\varphi.sin\lambda, Rsin\varphi)$$

1. Montrer qu'un vecteur normal unitaire $n$ à $(S)$ en $M$ est :

$$n = (cos\varphi.cos\lambda, cos\varphi.sin\lambda, sin\varphi)^T$$

2. Soit $(C)$ le grand cercle passant par le point $A(R, 0, 0)$ et d'azimut $Az_E$. Le point $M$ peut être décrit par son abscisse curviligne $s$ mesurant l'arc $AM$. On note par $\omega$ représente l'angle au centre de l'arc $AM$. Utilisant la trigonométrie sphérique, montrer que :

$$cos\varphi.sin\lambda = sin\omega.sinAz_E$$

3. En utilisant la formule fondamentale de la trigonométrie sphérique dans le triangle APM, montrer qu'on a les deux relations :

$$cos\omega = cos\varphi.cos\lambda$$
$$sin\varphi = sin\omega.cosAz_E$$

4. En déduire que les coordonnées de $M$ s'écrivent en fonction de $s$ comme suit :

$$M \begin{cases} X = R.cos(s/R) \\ Y = RsinAz_E sin(s/R) \\ Z = RcosAz_E sin(s/R) \end{cases}$$

5. Calculer les vecteurs $T$ et $N$ du repère de Frenêt. En déduire les composantes de $N$ en fonction de $\omega$.
6. Montrer que les vecteurs $N$ et $n$ sont parallèles.
7. Justifier que les géodésiques de la sphère sont les grands cercles.

**Problème 36.** Soit le tore $\mathbb{T}$ défini par les équations suivantes :

$$M(\varphi, \lambda) = \begin{cases} x = (a + Rcos\varphi)cos\lambda \\ y = (a + Rcos\varphi)sin\lambda \\ z = Rsin\varphi \end{cases}$$

où $a, R$ deux constantes positives avec $a > R$, $(\varphi, \lambda) \in [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$.
1. Calculer la première forme fondamentale $ds^2$.

2. Avec les notations usuelles, on pose :

$$\begin{aligned} &\frac{\partial E}{\partial \varphi} = E'_\varphi, \quad \frac{\partial E}{\partial \lambda} = E'_\lambda, \quad \frac{\partial F}{\partial \varphi} = F'_\varphi \\ &\frac{\partial F}{\partial \lambda} = F'_\lambda, \quad \frac{\partial G}{\partial \varphi} = G'_\varphi, \quad \frac{\partial G}{\partial \lambda} = G'_\lambda \end{aligned} \tag{6.1}$$

Utilisant les équations des géodésiques du cours, montrer que les équations des géodésiques du tore sont :

$$-2Rsin\varphi(a+Rcos\varphi)\frac{d\varphi}{ds}\frac{d\lambda}{ds} + (a+Rcos\varphi)^2\frac{d^2\lambda}{ds^2} = 0$$

$$Rsin\varphi(a+Rcos\varphi)\left(\frac{d\lambda}{ds}\right)^2 + R^2\frac{d^2\varphi}{ds^2} = 0$$

3. Montrer que la première équation ci-dessus donne :

$$(a+Rcos\varphi)^2\frac{d\lambda}{ds} = C = cte$$

Montrer qu'on retrouve l'équation de Clairaut avec $C = (a+R)sinAze$ où $Aze$ est l'azimut de départ au point $M_0(\varphi = 0, \lambda_0)$.
4. On suppose au point $M_0$, la géodésique a pour azimut $Aze$ tel que :

$$0 < Aze < \frac{\pi}{2}$$

Montrer que la deuxième équation des géodésiques s'écrit en utilisant le résultat précédent :

$$\frac{d^2\varphi}{ds^2} = -\frac{C^2}{R}\frac{sin\varphi}{(a+Rcos\varphi)^3}$$

5. Montrer qu'on arrive à :

$$\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 = l - \frac{C^2}{R^2(a+Rcos\varphi)^2} \geq 0$$

où $l$ est une constante d'intégration.

# 7 Les Systèmes Géodésiques

**Exercice 37.** On donne les coordonnées tridimensionnelles suivantes d'un point $A$ :

$$\begin{aligned} X &= 5\,102\,603.85\,m \\ Y &= 916\,806.87\,m \\ Z &= 3\,703\,034.99\,m \end{aligned}$$

L'ellipsoïde de référence est l'ellipsoïde GRS80 dont les paramètres sont :

$$\begin{aligned} a &= 6\,378\,137.00\,m \\ e^2 &= 0066943800229 \end{aligned}$$

1. Calculer le demi-petit axe $b$.
2. Déterminer les coordonnées géodésiques $(\varphi, \lambda, h)$ du point $A$. $\varphi$ et $\lambda$ seront calculées en grades avec cinq chiffres après la virgule.

**Exercice 38.** On donne l'expression scalaire d'une fonction $V(x,y,z)$ par :

$$V(x,y,z)=\frac{ax^2+y^2}{z^2}+\frac{1}{2}\omega^2(x^2+y^2)$$

1. Calculer les composantes du vecteur $\boldsymbol{grad}V$ dans un domaine de $\mathbb{R}^3$ où $z\neq 0$.

**Problème 39.** Soit un point $A(\varphi,\lambda)$ sur un ellipsoïde de révolution associé à un référentiel géocentrique donné $\mathcal{R}$. On considère le repère orthonormé local en A $(e_\lambda,e_\varphi,e_n)$ défini dans la base orthonormée $(i,j,k)$ de $\mathcal{R}$ où $e_\lambda$ est tangent au parallèle passant par $A$ et dirigé vers l'Est, $e_\varphi$ tangent à la méridienne, dirigé vers le nord et $e_n$ porté par la normale à l'ellipsoïde dirigé vers le zénith.
1. Exprimer les vecteurs de la base $(e_\lambda,e_\varphi,e_n)$ dans la base $(i,j,k)$ de $\mathcal{R}$.
2. Exprimer les vecteurs $i,j$ et $k$ dans la base $(e_\lambda,e_\varphi,e_n)$.
3. Calculer $de_\lambda,de_\varphi$ et $de_n$ dans la base $(i,j,k)$.
4. En adoptant une écriture matricielle, montrer que :

$$\begin{pmatrix}de_\lambda\\de_\varphi\\de_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&sin\varphi d\lambda&-cos\varphi d\lambda\\-sin\varphi d\lambda&0&-d\varphi\\cos\varphi d\lambda&d\varphi&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e_\lambda\\e_\varphi\\e_n\end{pmatrix}$$

**Problème 40.** On considère les notations du précédent problème. Soit un point $M$. On pose :

$$\Delta\mathbf{X}=(X_M-X_A,Y_M-Y_A,Z_M-Z_A)^T,\ \Delta\mathbf{x}=(x_M,y_M,z_M)^T$$

où $\Delta\mathbf{X}$ et $\Delta\mathbf{x}$ sont respectivement les composantes du vecteur $AM$ dans le repère $\mathcal{R}$ et le repère local en $A$.
1. Montrer qu'on a la relation : $\Delta\mathbf{X}=J.\Delta\mathbf{x}$ avec $J$ une matrice orthogonale ($J^{-1}=J^T$) qu'on déterminera.
2. On suppose maintenant que $\mathcal{R}$ est le repère GPS et que le passage du repère $\mathcal{R}$ vers le repère terrestre est donné par le modèle dit à 7 paramètres :

$$\begin{pmatrix}X'\\Y'\\Z'\end{pmatrix}=F(\mathbf{X})=\begin{pmatrix}Tx\\Ty\\Tz\end{pmatrix}+(1+m).R.\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}Tx\\Ty\\Tz\end{pmatrix}+(1+m).\begin{pmatrix}1&rz&-ry\\-rz&1&rx\\ry&-rx&1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix}$$

On note : $\delta\mathbf{X}=F(\Delta\mathbf{X})-\Delta\mathbf{X}$, que représente $\delta\mathbf{X}$. Montrer qu'au premier ordre :

$$\delta\mathbf{X}\cong m\Delta\mathbf{X}+(R-I)\Delta\mathbf{X}$$

3. On appelle $\omega=(rx,ry,rz)^T$, montrer que :

$$||\delta\mathbf{X}||=(m^2+\omega^2sin^2\theta)^{\frac{1}{2}}||\Delta\mathbf{X}||$$

où $\theta$ est l'angle entre les vecteurs $\Delta\mathbf{X}$ et $\omega$.
4. En déduire que :

$$|m|.||\Delta\mathbf{X}||\leq||\delta\mathbf{X}||\leq(m^2+\omega^2)^{\frac{1}{2}}||\Delta\mathbf{X}||$$

5. En utilisant la relation liant $\Delta\mathbf{X}$ et $\Delta\mathbf{x}$; montrer que :

$$\delta\mathbf{x}=m\Delta\mathbf{x}+J^T(R-I)J\Delta\mathbf{x}$$

**Problème 41.** On définit dans $\mathbb{R}^3$ un point $M$ par ses coordonnées ellipsoïdiques de Jacobi $(\phi, \lambda, u)$ comme suit :

$$M \begin{cases} x = \sqrt{u^2+\epsilon^2}.cos\phi cos\lambda \\ y = \sqrt{u^2+\epsilon^2}.cos\phi sin\lambda \\ z = u.sin\phi \end{cases}$$

avec : $\epsilon^2 = \sqrt{a^2-b^2}$, $\phi \in [-\pi/2, \pi/2]$, $\lambda \in [0, 2\pi]$ et $u \in ]0, +\infty[$, $a, b$ deux constantes réelles telles que $a > b > 0$.

1. Montrer que le point $M$ appartient à un ellipsoïde de révolution en précisant ses demi-axes.
2. Calculer $ds^2$ et montrer qu'il s'écrit sous la forme :

$$ds^2 = (d\phi, d\lambda, du).G.\begin{pmatrix} d\phi \\ d\lambda \\ du \end{pmatrix}$$

avec $G$ donnée par :

$$G = (g_{ij}) = \begin{pmatrix} u^2+\epsilon^2 sin^2\phi & 0 & 0 \\ 0 & (u^2+\epsilon^2)cos^2\phi & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{u^2+\epsilon^2 sin^2\phi}{u^2+\epsilon^2} \end{pmatrix}$$

3. Sachant que l'expression du laplacien d'une fonction scalaire $V$ en coordonnées de Jacobi est exprimée par :

$$\Delta V = \frac{1}{\sqrt{g}}\left\{\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\frac{\sqrt{g}}{g_{11}}.\frac{\partial V}{\partial\phi}\right) + \frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{\sqrt{g}}{g_{22}}.\frac{\partial V}{\partial\lambda}\right) + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\sqrt{g}}{g_{33}}.\frac{\partial V}{\partial u}\right)\right\}$$

où $g$ est le déterminant de la matrice $G$, donner l'expression de $\Delta V$.

4. Calculer $\Delta V$ sachant que $V$ est donnée par :

$$V(\phi, u) = \frac{GM}{\epsilon}Arctg\frac{\epsilon}{u} + \frac{1}{3}a^2\omega^2\frac{q}{q_0}\left(1 - \frac{3}{2}cos^2\phi\right) + \frac{1}{2}\omega^2(u^2+\epsilon^2)cos^2\phi$$

avec $G, M$ et $\omega$ des constantes et :

$$q = q(u) = \frac{1}{2}\left[\left(1+3\frac{u^2}{\epsilon^2}\right)Arctg\frac{\epsilon}{u} - 3\frac{u}{\epsilon}\right]$$

$$q_0 = q(u=b) = \frac{1}{2}\left[\left(1+3\frac{b^2}{\epsilon^2}\right)Arctg\frac{\epsilon}{b} - 3\frac{b}{\epsilon}\right]$$

**Problème 42.** Avec les notations usuelles, un potentiel est donné avec les constantes $(GM, a, J_2, \omega)$ de GRS80 par :

$$W(r, \theta, \lambda) = \frac{GM}{r}\left(1 - J_2\frac{a^2}{r^2}P_2(cos\theta)\right) + \frac{\omega^2}{2}r^2sin^2\theta$$

où $(r, \theta, \lambda)$ sont les coordonnées sphériques du point de calcul et :

- $a = 6378\,137.00\,m$, $b = 6356\,752.31\,m$ ;
- $GM = 3\,986\,005 \times 10^8\, m^3s^{-2}$ ;
- $\omega = 7\,292\,115 \times 10^{-11} rad.s^{-1}$ ;
- $J_2 = 108\,263 \times 10^{-8}$.

1. Calculer le potentiel $W$ aux points suivants situés sur l'ellipsoïde GRS80 :
   * le Pôle Nord ;
   * sur l'equateur ;
   * au point $A$ sur l'ellipsoïde avec $\theta_A = 34°$.
2. Calculer les variations de $W$ entre les 3 points.
3. Exprimer le potentiel $W$ en coordonnées cartésiennes $(X, Y, Z)$.

On rappelle : $P_2(cos\theta) = \frac{1}{2}(3cos^2\theta - 1)$.

**Problème 43.** On considère deux points $A$ et $B$ de coordonnées géodésiques dans le système géodésique $WGS84$ du GPS :

$$A : (\varphi'_A = 36.6306\,gr; \lambda'_A = 10.7896\,gr; h'_A = 137.50\,m)$$
$$B : (\varphi'_B = 36.6317\,gr; \lambda'_B = 10.7915\,gr; h'_B = 171.33\,m)$$

1. Calculer les coordonnées tridimensionnelles $(X', Y', Z')_A, (X', Y', Z')_B$ des points $A$ et $B$ dans le système géodésique $WGS84$. Les paramètres de l'ellipsoïde $WGS84$ sont : $a = 6\,378\,137.00m, e^2 = 0.00669438$.
2. On pose : $\Delta X' = X'_B - X'_A; \Delta Y' = Y'_B - Y'_A; \Delta Z' = Z'_B - Z'_A$. Calculer les coefficients $\Delta X', \Delta Y'$ et $\Delta Z'$. Sachant que l'azimut géodésique de la direction $AB$ est donné par la formule :

$$tg(Az'_g) = \frac{-\Delta X' sin\lambda'_A + \Delta Y' cos\lambda'_A}{\Delta Z' cos\varphi'_A - sin\varphi'_A(\Delta X' cos\lambda'_A + \Delta Y' sin\lambda'_A)} \tag{7.1}$$

calculer la valeur numérique de $Az'_g$.
3. On considère que le passage du système GPS au système géodésique terrestre national est donné par la formule :

$$\mathbf{X} = \mathbf{T} + \mathbf{X'}$$

où $\mathbf{X} = (X, Y, Z)^T$ représentant la position d'un point $M$ dans le système géodésique terrestre national, $\mathbf{X'} = (X', Y', Z')^T$ celle dans le système GPS et $\mathbf{T} = (Tx, Ty, Tz)^T$ le vecteur translation entre les deux systèmes, dont les composantes sont :

$$\mathbf{T} = (+263.3\,m, -14.4\,m, -434.1\,m)^T$$

Calculer les coordonnées géodésiques tridimensionnelles $(X, Y, Z)_A$ et $(X, Y, Z)_B$ de $A$ et $B$ dans le système géodésique terrestre national.
4. Calculer les coordonnées géodésiques $(\varphi, \lambda)$ du point $A$ dans le système géodésique terrestre national. On déterminera $(\varphi, \lambda)$ à cinq chiffres après la virgule en $gr$. On donne les paramètres de l'ellipsoïde de référence du système géodésique terrestre national : $(a = 6\,378\,249.20\,m, e^2 = 0.006803487)$.
5. On pose $\Delta X = X_B - X_A; \Delta Y = Y_B - Y_A; \Delta Z = Z_B - Z_A$.
   a- Calculer les coefficients $\Delta X, \Delta Y$ et $\Delta Z$.
   b- Déterminer en utilisant la formule (7.1) l'azimut géodésique $Az_g$ de la direction $AB$ en utilisant les coordonnées dans le système géodésique terrestre national.

$$tg(Az_g) = \frac{-\Delta X sin\lambda + \Delta Y cos\lambda}{\Delta Z cos\varphi - sin\varphi(\Delta X cos\lambda + \Delta Y sin\lambda)}$$

6. Calculer la valeur numérique de $Az'_g - Az_g$. Que pensez-vous.

# 8 Réductions des Distances

**Exercice 44.** On a mesuré une distance suivant la pente $D = 20130.858\,m$ entre deux points $A$ et $B$ avec $H_A = 235.07\,m$, $H_B = 507.75\,m$, on prendra comme rayon terrestre $R = 6378\,km$.
1. Calculer la distance suivant l'ellipsoïde :
   - en utilisant les différentes corrections,
   - en utilisant la formule rigoureuse.
2. En prenant la valeur de la formule rigoureuse et sachant que le module linéaire $m$ vaut 0.999 850 371, calculer la distance réduite au plan de la représentation plane utilisée.

**Exercice 45.** Entre 2 points $A$ ( $H_A = 128.26\,m$ ) et $B$ ( $H_B = 231.84\,m$), la distance mesurée $D$ suivant la pente est égale à $15\,498.823\,m$. Soit $D_0$ la distance corde au niveau de la surface de référence. On prendra comme rayon terrestre $R = 6378\,km$. 1. Calculer la valeur de $D_0$ en utilisant la formule rigoureuse.
2. Calculer $D_0$ par les corrections.
3. En adoptant la moyenne des deux méthodes, calculer la distance $D_e$ réduite à la surface de référence.
4. Le module linéaire de la représentation plane Lambert Sud utilisée est de 0.999 648 744. calculer alors la distance $D_r$ réduite au plan de la représentation.

**Problème 46.** On a mesuré une distance $D$ suivant la pente entre les points $A(H_A = 1\,319.79\,m)$ et $B\,(H_B = 1\,025.34\,m)$ avec $D = 16\,483.873\,m$.
1. Calculer la distance $D_e$ distance réduite à l'ellipsoïde de référence par la formule rigoureuse, on prendra le rayon de la Terre $R = 6378\,km$.
2. Calculer la distance $D_r$ réduite à la représentation plane Lambert si l'altération linéaire de la zone est de $-14\,cm/km$.
3. La direction $AB$ a un azimut géodésique $Azg = 297.56225\,gr$. Donner l'expression du gisement $G$ de $AB$ en fonction de $Azg, \gamma$ la convergence des méridiens et $dv$ la correction de la corde, sachant que la représentation plane utilisée est le Lambert Sud Tunisie et que le point $A$ est au nord du parallèle origine.
4. On donne $dv = -13.7\,dmgr$ et $\lambda = 9.3474734\,gr$ la longitude de $A$, calculer $G$.
5. En déduire les coordonnés $(X_B, Y_B)$ de $B$ si $X_A = 363\,044.79\,m$ et $Y_A = 407\,020.09\,m$.
6. Déterminer les coordonnées géographiques $(\varphi, \lambda)$ de $B$.

# 9 Les Représentations Planes

## 9.1 Les Représentations Planes

**Exercice 47.** Soit $\mathbb{S}^2$ la sphère de rayon $R$. Au point $P(\varphi, \lambda)$ de $\mathbb{S}^2$ on lui fait correspondre le point $p(X, Y)$ du plan $OXY$ par la représentation plane suivante définie par les formules :

$$p(X,Y)\begin{cases} X = R.cos\lambda \\ Y = R.sin\varphi \end{cases}$$

1. Cette représentation est-elle cylindrique ou conique ? Justifier votre réponse ?
2. Soit $dS$ la longueur infinitésimale correspondante sur le plan, donner l'expression de $(dS)^2$ en fonction de $\varphi, \lambda, d\varphi, d\lambda$ et $R$.
3. Soit $m$ le module linéaire, montrer que $m^2 = \dfrac{cos^2\varphi d\varphi^2 + sin^2\lambda d\lambda^2}{d\varphi^2 + cos^2\varphi d\lambda^2}$.
4. En déduire les modules linéaires $m_1$ le long du méridien ($\lambda =$ constante) et $m_2$ le long du parallèle ($\varphi =$ constante).
5. Cette représentation est-elle conforme ? Par quoi est représentée l'indicatrice de Tissot ?

**Problème 48.** Soit $\mathbb{S}^2$ la sphère de rayon $R$, au point $P(\varphi, \lambda)$ on lui fait correspondre le point $p(X, Y)$ du plan $OXY$ par la représentation plane suivante définie par les formules :

$$p(X,Y) = \begin{cases} X = 2R.tg(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\varphi}{2}).sin\lambda \\ Y = -2R.tg(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\varphi}{2}).cos\lambda \end{cases}$$

1. Montrer que l'image d'un méridien ($\lambda =$ constante ) est une droite dont on donne l'équation.
2. Montrer que l'image d'un parallèle ($\varphi =$ constante ) est un cercle dont on précise l'équation.
3. En utilisant le lemme de Tissot, déterminer les directions principales.

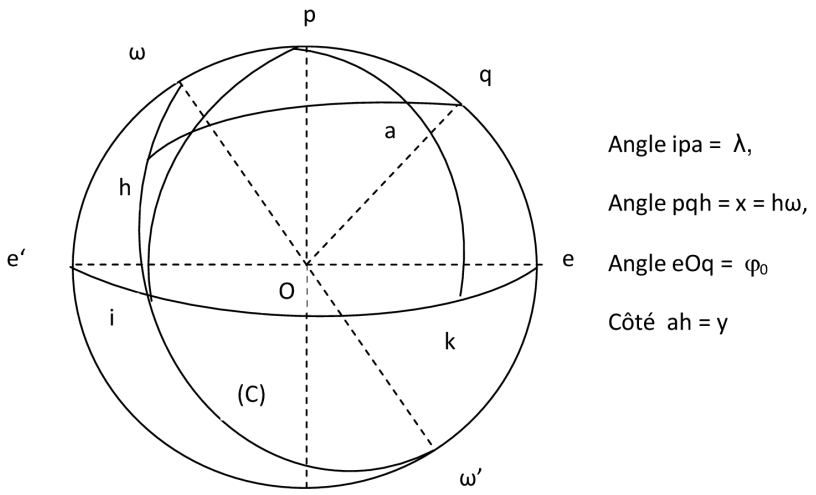



FIGURE 5 – Représentation cylindrique conforme oblique tangente

4. Soit $dS$ la longueur infinitésimale correspondante sur le plan, calculer $dS$.
5. Sachant que sur la sphère $ds^2 = R^2 d\varphi^2 + R^2 cos^2\varphi . d\lambda^2$, calculer le module linéaire $m$.
6. En déduire le module linéaire $m_1$ le long du méridien.
7. En déduire le module linéaire $m_2$ le long d'un parallèle.
8. Comparer $m_1$ et $m_2$. Conclure sur la conformité ou la non conformité de la représentation plane.

**Problème 49.** Soit $\Sigma$ la sphère de rayon $R$, au point $P(\varphi, \lambda)$ on lui fait correspondre le point $p(X, Y)$ du plan $OXY$ par la représentation plane suivante définie par les formules :

$$p(X,Y) = \begin{cases} X = R.\lambda \\ Y = R.Log\, tg(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\varphi}{2}) \end{cases}$$

où $Log$ désigne le logarithme népérien.
1. Quelles sont les images des méridiens ($\lambda =$ constante) et des parallèles ($\varphi =$ constante).
2. Soit $dS$ la longueur infinitésimale correspondante sur le plan, calculer $dS$ en fonction de $\varphi$ et de $\lambda$ et calculer le module linéaire $m$.
3. En déduire les modules linéaires $m_1$ le long du méridien et $m_2$ le long du parallèle.
4. Comparer $m_1$ et $m_2$ et conclure sur la conformité ou la non conformité de la représentation plane.
5. On suppose que $P$ décrit sur la surface $\Sigma$ une courbe $(\gamma)$ telle que $\varphi$ et $\lambda$ sont liées par la relation : $tg\varphi = sin\lambda$. Pour $\varphi = 0\,gr$, $2\,gr$, $4\,gr$, $6\,gr$, $8\,gr$ et $10\,gr$, dresser un tableau donnant les valeurs de $\lambda$ correspondantes.
6. Sachant que $R = 1000\,m$, calculer les coordonnées $(X, Y)$ de la représentation plane donnée ci-dessus pour les valeurs de $\varphi$ et $\lambda$ de la question 5.
7. Rapporter à l'échelle $1/100$ sur le plan $OXY$, les positions $(X, Y)$ des points. Que pensez-vous de l'image de la courbe $(\gamma)$.

**Problème 50.** Sur une sphère de rayon unité, modèle de la terre, on désigne :
- par $p$ le pôle nord,
- par $(C)$ un grand cercle qui coupe l'équateur au point $i$ de longitude nulle,
- par $q$ le pôle de ce grand cercle, de latitude $\varphi_0$ positive,
- par $\omega$ et $h$ respectivement les points d'intersection de $(C)$ et du méridien de $q$ et du grand cercle issu de $q$, passant par le point $a(\varphi, \lambda)$.

On pose : $\omega h = x$, $\quad ha = y$

1. $q$ est le pivot d'une représentation cylindrique conforme oblique tangente (voir **Fig. 5**), dont $(C)$ est le "pseudo-équateur". Le plan est rapporté aux axes $\Omega X, \Omega Y$ images respectives de $(C)$ et du grand

cercle $\omega pq$. Exprimer en fonction de $\varphi, \lambda$ et $\varphi_0$ les coordonnées $X, Y$ du point $A$ image de $a$ (vérifier que pour $\varphi_0 = 0$, on retrouve les expressions de $X, Y$ d'une représentation transverse).
2. Montrer que l'équation de l'image plane du parallèle de latitude $\varphi_0$ peut s'écrire :

$$e^Y cosX = tg\varphi_0$$

3. Montrer que l'image plan de l'équateur a pour équation :

$$cosX + tg\varphi_0.shY = 0$$

$sh$ désigne le sinus hyperbolique $sht = (e^t - e^{-t})/2$, $cht = (e^t + e^{-t})/2$ le cosinus hyperbolique.
Ecrire d'une manière analogue, l'équation de l'image du méridien $\lambda = 0$.
4. Exprimer le gisement du méridien en fonction de $\varphi, \lambda$ et $\varphi_0$. Déterminer la valeur du module linéaire, en particulier en $p$, en un point de l'équateur, en un point du méridien origine.

**Problème 51.** Pour une représentation plane, on dit qu'elle est **équivalente** si le produit des modules linéaires $m_1$ et $m_2$ suivant les directions principales vérifient :

$$m_1.m_2 = 1$$

Soit le modèle terrestre représenté par la sphère de rayon $R$ qu'on note $\mathbb{S}^2$. Au point $P(\varphi, \lambda)$ on lui fait correspondre le point $p(X, Y)$ du plan $OXY$ par la représentation plane suivante définie par les formules :

$$p(X,Y) \begin{cases} X = 2R.sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right).cos\lambda \\ \\ Y = 2R.sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right).sin\lambda \end{cases} \tag{9.1}$$

1. Qu'elle est l'image du pôle nord $P_N$ ?
2. Montrer que l'image d'un méridien ($\lambda = \lambda_0$=constante ) est une droite dont on donne l'équation.
3. Montrer que l'image d'un parallèle ($\varphi = \varphi_0$=constante ) est un cercle dont on précise l'équation.
4. En utilisant le lemme de Tissot, déterminer les directions principales.
5. Soit $ds$ la longueur infinitésimale correspondante sur la sphère, donner l'expression de $ds^2$.
6. Soit $dS$ la longueur infinitésimale correspondante sur le plan. Montrer que :

$$dS^2 = R^2 cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) d\varphi^2 + 4R^2 sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right).d\lambda^2$$

7. En déduire le carré du module linéaire $m^2$.
8. Calculer le module linéaire $m_1$ le long du parallèle.
9. Calculer le module linéaire $m_2$ le long du méridien.
10. La représentation plane définie par (9.1) est-elle équivalente. Justifier votre réponse.

**Problème 52.** Etude de la représentation conforme d'une sphère de rayon unité dite représentation de Littrow[6] définie par :

$$Z = sinz$$

avec $z = \lambda + iL$, $Z = X + iY$ et $L$ la latitude croissante $L = Logtg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)$.
1. Préciser le canevas, les images des méridiens et celle de l'équateur.
2. Vérifier que les points $f$ et $f'$ ($\varphi = 0, \lambda = \pm\pi/2$) sont des points singuliers.
3. Soit $s$ le point ($\varphi = \varphi_0, \lambda = 0$). On appelle segment capable sphérique l'ensemble des points $b$ tels que l'angle $\widehat{bp, bs} = \alpha$. Quelle est l'image plane de cette courbe dans cette représentation plane.

6. En hommage à Joseph Johann Littrow (1781-1840) astronome autrichien.

**Problème 53.** Soit l'application $F(u,v) : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3\backslash(0,0,1)$ définie par :

$$OM(u,v) = F(u,v)\begin{cases} x = \dfrac{2u}{u^2+v^2+1} \\ y = \dfrac{2v}{u^2+v^2+1} \\ z = \dfrac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2+1} \end{cases}$$

1. Calculer la forme fondamentale $ds^2$.
2. Montrer que $OM(u,v)$ appartient à la sphère $\mathbb{S}^2$ d'équation $x^2+y^2+z^2=1$.
3. Calculer $u,v$ en fonction de $x,y$ et $z$.
4. Soit le point $N(0,0,1)$ de $\mathbb{S}^2$, calculer les coordonnées $(X,Y)$ du point $p$ intersection de la droite $NM$ avec la plan $z=0$ en fonction de $x,y$ et $z$.
5. Soit $\sigma$ l'application $\mathbb{R}^3\backslash(0,0,1) \longrightarrow \mathbb{R}^2 : (x,y,z) \longrightarrow (X,Y) = (X(x,y,z), Y(x,y,z))$. Montrer que $(\sigma \circ F)(u,v) = \sigma(F(u,v)) = (u,v)$. En déduire que $F = \sigma^{-1}$.

**Problème 54.** Soit un ellipsoïde de révolution $E(a,e)$ avec $a$ et $e$ respectivement le demi-grand axe de l'ellipsoïde de révolution et $e$ la première excentricité. Soit $\mathbb{S}^2$ une sphère de rayon $R$. On veut étudier le passage suivant :

$$p(\varphi,\lambda) \text{ de l'ellipsoïde } E \Rightarrow P(\psi,\Lambda) \text{de la sphère } \mathbb{S}^2$$

1. Exprimer $m$ le module linéaire de cette représentation.
2. On pose :

$$z = \mathcal{L} + i\lambda, \quad Z = L + i\Lambda$$

$\mathcal{L}$ est la latitude isométrique de l'ellipsoïde de révolution et $L$ la latitude de Mercator. Une transformation conforme entre $E$ et $\mathbb{S}^2$ est donnée par $Z = f(z)$ où $f$ est une fonction analytique. On propose le cas le plus simple à savoir :

$$Z = \alpha z + \beta$$
$$avec \begin{cases} \alpha = c_1 + ic_2 \\ \beta = b_1 + ib_2 \end{cases}$$

les $c_1, c_2, b_1, b_2$ sont des constantes réelles. Donner les expressions de $L$ et $\Lambda$ en fonction de $\mathcal{L}$ et $\lambda$.
3. On veut que la repésentation transforme les méridiens et les parallèles de l'ellipsoïde respectivement en méridiens et parallèles de la sphère et que l'image du méridien origine $\lambda = 0$ soit le méridien origine de la sphère $\Lambda = 0$. Montrer que $c_2 = b_2 = 0$ et $L = c_1\mathcal{L} + b_1, \quad \Lambda = c_1\lambda$.
4. Pour avoir la même orientation en longitude, on prendra $c_1 > 0$. On cherchera la transformation à déformation minimale autour d'un parallèle $\varphi = \varphi_0$ tel que le parallèle $\varphi = \varphi_0$ est automécoique et le module linéaire $m$ est stationnaire pour $\varphi = \varphi_0$, c'est-à-dire $m(\varphi_0) = 1$ et $\left(\dfrac{dm}{d\varphi}\right)\Big|_{\varphi=\varphi_0} = 0$, en plus on considère aussi la condition :

$$\left(\frac{d^2m}{d\varphi^2}\right)\Big|_{\varphi=\varphi_0} = 0$$

Pour faciliter les notations, on prendra $b = b_1, c = c_1$. Montrer que la relation liant $\varphi_0$ et $\psi_0$ est :

$$tg\psi_0 = tg\varphi_0\sqrt{\frac{1-e^2}{1-e^2sin^2\varphi_0}}$$

5. Déterminer les constantes $b, c$ et $R$ en fonction de $\varphi_0$ et $\psi_0$ telles que les conditions ci-dessus soient vérifiées.
6. Montrer que l'expression du développement limité de $m(\varphi)$ de part et d'autre du parallèle $\varphi_0$ est donnée par :

$$m(\varphi) = 1 - \frac{2e^2(1-e^2)sin\varphi_0 cos\varphi_0}{3(1-e^2 sin^2\varphi_0)^2}(\varphi-\varphi_0)^3 + o((\varphi-\varphi_0)^4)$$

7. On fait intervenir la deuxième excentricite $e'$, Montrer que $m(\varphi)$ s'écrit :

$$m(\varphi) = 1 - \frac{2e'^2 sin\varphi_0 cos\varphi_0}{3(1+e'^2 cos^2\varphi_0)^2}(\varphi-\varphi_0)^3 + o((\varphi-\varphi_0)^4)$$

## 9.2 La Représentation Lambert

**Exercice 55.** En un point $A$ de coordonnées géodésiques $\varphi = 40.9193\,gr$ et $\lambda = 11.9656\,gr$ à l'Est de Greenwich, on vise un point $B$.
1. Dans quelle zone de Lambert Tunisie se trouve le point $A$? Calculer ses coordonnées planes $(X, Y)$.
2. L'azimut géodésique de la direction $AB$ est $Azg = 55.7631\,gr$. Sachant que $Dv = 1.52\,dmgr$, calculer $G$ le gisement de la direction $AB$.
3. La distance $AB$ réduite à l'ellipsoïde de référence est $D_e = 5421.32\,m$. Sachant que l'altération linéaire dans la région des points $A$ et $B$ vaut $-9\,cm/km$, calculer la distance $AB$ réduite au plan.

**Exercice 56.** D'après les coordonnées de deux points $A$ et $B$ vous trouvez la distance $AB = 5427.380\,m$. On a les données suivantes :
a - l'altération linéaire de la représentation dans la région de $AB$ vaut $+8.10^{-5}$,
b - les altitudes des points $A$ et $B$ sont : $H_A = 1000.00\,m$ et $H_B = 1200.00\,m$.
1. Calculer la distance suivant la pente $D_P$ entre les points $A$ et $B$ matérialisés sur le terrain.

**Problème 57.** On a mesuré une distance suivant la pente $D_P = 20\,130.858\,m$ entre deux points $A$ et $B$ avec $H_A = 235.07\,m$, $H_B = 507.75\,m$, on prendra comme rayon terrestre $R = 6378\,km$.
1. Calculer la distance $D_e$ suivant l'ellipsoïde en utilisant la formule rigoureuse.
2. Sachant que le module linéaire $m$ vaut 0.999 850 371, calculer la distance $D_r$ réduite au plan de la représentation plane utilisée.
3. Les coordonnées géodésiques du point $A$ sont : $\lambda = 10.7245\,3\,gr$, $\varphi = 41.4490\,3\,gr$. Par des observations astronomiques, on a déterminé les coordonnées astronomiques $\lambda_a = 10.7257\,4\,gr$ et $\varphi_a = 41.4505\,2\,gr$ du point $A$ et l'azimut astronomique de la direction $AB$ soit $Aza = 89.6849\,9\,gr$. Transformer l'azimut astronomique de la direction $AB$ en azimut géodésique en utilisant l'équation de Laplace donnée par :

$$Azg = Aza + (\lambda - \lambda_a).sin\varphi$$

4. Calculer le gisement $G$ de la direction $AB$ sachant que $Dv = 0.0018\,8\,gr$.
5. Les coordonnées Lambert Nord Tunisie de $A$ sont $X = 478\,022.43\,m$ et $Y = 444\,702.22\,m$. Déterminer alors les coordonnées de $B$.
6. Calculer l'azimut de $B$ vers $A$ sachant qu'on néglige la correction de la corde de la direction $BA$ et que $\lambda_B = 10.9288\,4\,gr$.

**Problème 58.** On donne deux points $A$ et $B$ dont les coordonnées géodésiques dans le système géodésique Tunisien sont :

$$A\begin{cases}\varphi = 40.4549\,830\,gr\\ \lambda = 9.5954\,2429\,gr\\ h = 742.40\,m\end{cases} \qquad B\begin{cases}\varphi' = 40.3385\,665\,gr\\ \lambda' = 9.4548\,3610\,gr\\ h' = 987.00\,m\end{cases} \tag{9.2}$$

On a mesuré la distance $D_P$ suivant la pente entre $A$ et $B$ soit $D_P = 16\,259.249\,m$.
1. Calculer la distance $D_e$ réduite à la surface de l'ellipsoïde de référence.

2. Rappeler l'expression du module linéaire $m$ de la représentation Lambert Nord Tunisie.
3. Calculer le module linéaire moyen des modules linéaires calculés en $A$ et $B$.
4. Calculer alors $D_r$ la distance réduite au plan de la représentation Plane Lambert Nord Tunisie.
5. En $A$, on a déterminé l'azimut géodésique $Azg$ de $A$ vers $B$, $Azg = 249.3101\,68\,gr$. En négligeant $dv$ la correction de la corde, calculer le gisement $G$ de la direction $AB$.
6. Calculer $(X, Y)$ les coordonnées Lambert Nord Tunisie du point $A$. En déduire alors $(X', Y')$ les coordonnées Lambert Nord Tunisie du point $B$ à partir de celles de $A$.
7. Calculer directement les coordonnées $(X", Y")$ de $B$. Comparer les avec celles de la question précédente ?

(On donne $a = 6378\,249.20\,m, e^2 = 0.006\,803\,4877, k_N = 0.999\,625\,544$, rayon moyen de la Terre $R = 6378\,000\,m$)

## 9.3 La Représentation UTM

**Exercice 59.** Dans cet exercice, on voudrait justifier l'arrêt à l'ordre 8 de l'expression de $Y(UTM)$ en fonction de $\lambda$. On donne : $\varphi = 40.00\,gr$ et $a = 6\,378\,249.20\,m$, $e^2 = 0.006\,803\,4877$.
1. Calculer numériquement $e'^2, \eta^2, t^2 = tg^2\varphi$ et $N(\varphi)$.
2. Calculer numériquement le coefficient $a_8$ :

$$a_8 = \frac{1}{40320} N cos^7\varphi sin\varphi (165 - 61t^2 + 537t^4 + 9679\eta^2 - 23278t^2\eta^2 + 9244\eta^4 + 358t^4\eta^2 - 19788t^2\eta^4)$$

3. On donne $\lambda = 1.235\,46\,gr$, calculer $a_8\lambda^8$ et conclure.

**Problème 60.** Soit le point $A$ de coordonnées géodésiques : $\varphi = 40.9193\,gr$ et $\lambda = 11.9656\,gr$ à l'Est de Greenwich. On considère la représentation plane UTM tronquée suivante, de méridien central $\lambda_0 = 9°$ définie par les formules :

$$\begin{cases} X = a_1.(\lambda - \lambda_0) + a_3.(\lambda - \lambda_0)^3 \\ Y = g(\varphi) + a_2.(\lambda - \lambda_0)^2 \end{cases}$$

où $\varphi$, $\lambda$ et $\lambda_0$ sont exprimées en $rd$, avec :

$$a_1 = N(\varphi).cos\varphi$$

$$a_2 = \frac{a_1}{2}.sin\varphi$$

$$a_3 = \frac{a_1 cos^2\varphi}{6}(1 - tg^2\varphi + e'^2.cos^2\varphi)$$

$$N(\varphi) = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2.sin^2\varphi}}$$

$$g(\varphi) = a(1 - e^2)(1.0051353.\varphi - 0.0025731 sin2\varphi)$$

$$a = 6\,378\,249.20\,m, \quad e^2 = 0.006\,803\,4877, \quad e'^2 = \frac{e^2}{1 - e^2}$$

1. Montrer que les coordonnées du point $A$ sont : $X = 157\,833.48\,m$ , $Y = 4\,078\,512.97\,m$, on justifie les résultats.
2. Soit le point $B$ de coordonnées $(X = 160\,595.98\,m; Y = 4\,078\,564.53\,m)$. Sachant que $B$ est situé sur le même parallèle que $A$, calculer la longitude $\lambda'$ de $B$.
3. Calculer le gisement $G$ et la distance $AB$.
4. Sachant que la convergence des méridiens $\gamma$ est donnée par $tg\gamma = (\lambda - \lambda_0)sin\varphi$ et qu'on néglige le $Dv$, calculer l'azimut de la direction $AB$.
5. Calculer l'azimut de $B$ vers $A$ en négligeant le $Dv$ de $B$ vers $A$.
6. En calculant les coordonnées UTM de $A$ et $B$, on trouve respectivement $X_A = 657\,770.34\,m$, $Y_A = 4\,076\,891.20\,m$; $X_B = 660\,531.74\,m$, $Y_B = 4\,076\,942.76\,m$. Calculer la distance $AB$ par les coordonnées UTM. En déduire l'erreur relative sur la distance en utilisant les coordonnées de l'UTM tronquée.

# 10 Les Transformations de Passage entre Les Systèmes Géodésiques

## 10.1 Les Transformations 2D de passage entre les Systèmes Géodésiques

**Exercice 61.** On donne le modèle bidimensionnel suivant, de transformation entre deux systèmes géodésiques, défini par :

$$\begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -21.662\,m \\ -627.748\,m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.999\,988\,149 & -0.000\,025\,928 \\ -0.000\,025\,928 & 0.999\,988\,149 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{pmatrix}$$

1. S'agit-il du modèle bidimensionnel de Helmert ? Justifier.
2. Donner les valeurs numériques respectivement du facteur d'échelle et de l'angle de la rotation entre les deux systèmes.

## 10.2 Les Transformations 3D de passage entre les Systèmes Géodésiques

**Problème 62.** Soient les trois tableaux ci-dessous des coordonnées 3D respectivement dans les systèmes $S1$ et $S2$ et à transformer dans le système $S2$ :

| *Nom* | X(m) | Y(m) | Z(m) |
|---|---|---|---|
| 1 | 4 300 244.860 | 1 062 094.681 | 4 574 775.629 |
| 2 | 4 277 737.502 | 1 115 558.251 | 4 582 961.996 |
| 3 | 4 276 816.431 | 1 081 197.897 | 4 591 886.356 |
| 4 | 4 315 183.431 | 1 135 854.241 | 4 542 857.520 |
| 5 | 4 285 934.717 | 1 110 917.314 | 4 576 361.689 |
| 6 | 4 217 271.349 | 1 193 915.699 | 4 618 635.464 |
| 7 | 4 292 630.700 | 1 079 310.256 | 4 579 117.105 |

| *Nom* | X(m) | Y(m) | Z(m) |
|---|---|---|---|
| 1 | 4 300 245.018 | 1 062 094.592 | 4 574 775.510 |
| 2 | 4 277 737.661 | 1 115 558.164 | 4 582 961.878 |
| 3 | 4 276 816.590 | 1 081 197.809 | 4 591 886.238 |
| 4 | 4 315 183.590 | 1 135 854.153 | 4 542 857.402 |
| 5 | 4 285 934.876 | 1 110 917.227 | 4 576 361.571 |
| 6 | 4 217 271.512 | 1 193 915.612 | 4 618 635.348 |
| 7 | 4 292 630.858 | 1 079 310.168 | 4 579 116.986 |

| *Nom* | X(m) | Y(m) | Z(m) |
|---|---|---|---|
| *A* | 4 351 694.594 | 1 056 274.819 | 4 526 994.706 |
| *B* | 4 319 956.455 | 1 095 408.043 | 4 548 544.867 |
| *C* | 4 303 467.472 | 1 110 727.257 | 4 560 823.460 |
| *D* | 4 202 413.995 | 1 221 146.648 | 4 625 014.614 |

1. Déterminer les paramètres du modèle de Burša-Wolf à 7 paramètres.
2. Calculer les coordonnées 3D des points du troisième tableau dans le système $S2$.

# 11 Géodésie Spatiale

## 11.1 Notions sur le Mouvement d'un Satellite Artificiel de la Terre

**Exercice 63.** 1. Montrer que : $r = a(1 - ecosE)$.
2. Démontrer à partir des formules du cours la relation :

$$tg\frac{\upsilon}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-2}}tg\frac{E}{2}$$

Aide : exprimer $tg(\upsilon/2)$ en fonction de $tg\upsilon$.

**Exercice 64.** 1. A partir de l'expression de $X_C$, monter que $X_C$ vérifie l'équation du mouvement non perturbé pour la composante $X$, soit :

$$\ddot{X}_C + \frac{\mu}{r^3}X_C = 0$$

**Problème 65.** La Terre est supposée sphérique, homogène de rayon $R = 6\,371\,000\,m$. Le produit de la constante universelle de gravitation terrestre $G$ par la masse $M$ de la Terre soit $GM = 3.986\,005\,10^{14}\,m^3s^{-2}$. Un satellite géodésique a une trajectoire telle que son altitude maximale est $1100\,km$ et son altitude minimale $800\,km$.
1. Donner la période du mouvement de ce satellite.
2. Quelle est l'excentricité de sa trajectoire ?
3. On mesure la distance du satellite à une station au sol de latitude $43°,5$ et d'altitude nulle, lors du passage du satellite à la verticale de la station, soit $D = 812\,000\,m$.
   a - Quelle est l'anomalie vraie du satellite à cet instant, sachant qu'il vient de passer au périgée.
   b - Combien de temps s'est écoulé depuis le passage au périgée ?

**Problème 66.** Une comète décrit autour du Soleil une ellipse d'excentricité $e$ de demi-grand axe $a$ et de demi-petit axe $b$ où le Soleil occupe un des foyers. L'équation de l'orbite de la comète en coordonnées polaires est donnée par :

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+ecos\upsilon}$$

avec $r$ la distance Soleil- comète. 1. Déterminer les distances $r_A$ et $r_P$ lorsque la comète est à l'apogée et au périgée en fonction de $a$ et $e$.
2. La comète de Halley a une orbite fortement excentrique : son apogée est à 0.53 $UA$ du Soleil et sa périgée est à 35.1 $UA$. Calculer $e$.
3. En utilisant la loi des aires et la troisième loi de Kepler, montrer que la constante des aires $C$ est exprimée par :

$$C^2 = \frac{b^2}{a}G.M$$

où $G, M$ désignent respectivement la constante de la gravitation universelle et la masse du Soleil.
4. On pose : $u = \frac{1}{r}$. Donner l'expression du carré de la vitesse $v^2$ de la comète en fonction de $u$ et $\frac{du}{d\upsilon}$. Montrer que $v^2$ peut s'écrire sous la forme :

$$v^2 = G.M\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)$$

5. Déterminer l'expression du rapport des vitesses à l'apogée et au périgée $\frac{v_A}{v_P}$ en fonction de $e$.
6. Calculer numériquement ce rapport pour le cas de la comète de Halley.

On donne :
- 1 $UA = 149\,597\,870\,km$,
- $G = 6.672 \times 10^{-11}\, m^3.kg^{-1}.s^{-2}$,
- $M = 1.9891 \times 10^{30}\, kg$.

# 12 Modèles Linéaires de Compensation

**Exercice 67.** Soient $U$ un ouvert convexe d'un espace de Banach[7] réel $E$ c'est-à-dire un espace vectoriel normé complet sur $\mathbb{R}$ et $f$ une fonction à valeurs réelles, différentiable et convexe dans $U$.
1. Montrer que si $f'(x_0) = 0$ en un point $x_0 \in U$, alors $f$ a un minimum absolu en $x_0$.

**Exercice 68.** 1. En utiliser l'identité remarquable :

$$\|\alpha x + (1-\alpha)y\|^2 = \alpha\|x\|^2 + (1-\alpha)\|y\|^2 - \alpha(1-\alpha)\|x-y\|^2$$

Montrer que dans un espace de Banach réel $E$, la fonction $f = \|\,.\,\|^2$ est strictement convexe, c'est-à-dire, $\forall\, \alpha \in ]0,1[,\ f(\alpha x + (1-\alpha)y) < \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y)$, pour tout couple $(x,y) \in E^2$.

**Exercice 69.** On note $F$ une surface de $\mathbb{R}^3$ définie par la représentation paramétrique :

$$\boldsymbol{OM} = (a_1(u,v), a_2(u,v), a_3(u,v))^T$$

où $u$ et $v$ sont deux paramètres réels. On se donne un point $P(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.
1. Donner une condition géométrique portant sur le plan tangent à $F$ au point $M_0(u_0,v_0)$ pour que la différentielle de la fonction $(u,v) \longrightarrow \varphi(u,v) = \|\boldsymbol{OP} - \boldsymbol{OM}(u,v)\|^2$ soit nulle en $M_0(u_0,v_0)$.

**Exercice 70.** Soient $U$ un ouvert convexe d'un espace de Banach réel $E$ et $f$ une application différentielle de $U$ dans $\mathbb{R}$.
1. Montrer que $f$ est convexe dans $U$ si et seulement si :

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

pour tout couple de points $x, x_0 \in U$.
2. On suppose $E = \mathbb{R}^n$ et $f$ de classe $C^2$ soit deux fois différentiable et $f$" continue ; pour $x \in U$, soit $\varphi_x$ la forme quadratique définie par :

$$\varphi_x(h) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) h_i h_j, \qquad h = (h_1, h_2, ..., h_n) \in \mathbb{R}^n$$

Montrer que $f$ est convexe dans $U$ si et seulement si $\varphi_x$ est positive pour tout $x \in U$ soit $\varphi_x(h) \geq 0$ pour $x \in U$ et $h \in \mathbb{R}^n$.

**Exercice 71.** Soit un triangle $ABC$, on observe les angles $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ et les côtés $BC = a, AC = b$ et $AB = c$ :

$$\begin{cases} \hat{A} = 43.7716\,0\,gr & \sigma_{\hat{A}} = 3.1\,dmgr \\ \hat{B} = 98.3904\,3\,gr & \sigma_{\hat{B}} = 3.1\,dmgr \\ \hat{C} = 57.8385\,8\,gr & \sigma_{\hat{C}} = 3.1\,dmgr \\ a = 333.841\,m, & \sigma_a = 0.005\,m \\ b = 525.847\,m, & \sigma_b = 0.010\,m \\ c = 414.815\,m, & \sigma_c = 0.005\,m \end{cases}$$

1. Calculer les angles et les côtés compensés.
2. Calculer les poids de l'angle $\hat{A}$ et du côté $a$.
3. Déterminer une estimation du facteur de variance unitaire.

7. **Stefan Banach** (1892-1945) : mathématicien polonais.

**Problème 72.** Les directions suivantes sont observées respectivement aux stations $A, B, C$ et $D$ d'un quadrilatère $ABDC$ comme suit :

$$Station\ A = \begin{cases} vers\ B : \ 0.0000\,0\,gr \\ vers\ C : 74.1666\,7\,gr \end{cases}$$

$$Station\ B = \begin{cases} vers\ D : \ 0.0000\,0\,gr \\ vers\ C : 82.4608\,0\,gr \\ vers\ A : 170.6253\,1\,gr \end{cases}$$

$$Station\ C = \begin{cases} vers\ A : \ 0.0000\,0\,gr \\ vers\ B : 37.6709\,9\,gr \\ vers\ D : 85.0830\,2\,gr \end{cases}$$

$$Station\ D = \begin{cases} vers\ C : \ 0.0000\,0\,gr \\ vers\ B : 70.1280\,9\,gr \end{cases}$$

Les observations sont non corrélées. L'écart quadratique moyen de ces observations est identique et vaut $\sigma_d = 6.2\,dmgr$.

1. Compenser les directions et calculer leurs poids et celui de l'angle $CBA$.
2. Calculer l'estimateur $s^2$ du facteur de variance unitaire et celui de $\dfrac{s^2}{\sigma^2}$.
3. Des observations de nivellement ont été effectuées sur les lignes $ABC$ et $BCD$. Les différences d'altitudes observées sont les suivantes :

$$\begin{aligned} H_A - H_B &= 0.509\,m \\ H_B - H_D &= 1.058\,m \\ H_A - H_C &= 3.362\,m \\ H_D - H_C &= 1.783\,m \\ H_B - H_C &= 2.829\,m \end{aligned}$$

Les observations sont non corrélées et de précision identique. Compenser les observations ci-dessus et calculer un estimateur du facteur de variance unitaire.

**Problème 73.** 1. Montrer que dans un cheminement altimétrique de précision, le poids de l'observation entre deux repères est inversement proportionnel de leur distance en supposant l'égalité des portées et que les observations sont non corrélées.
2. Une polygonale $ABCD$ (voir **Fig.** 6) a été observée par le nivellement de précision. L'instrument utilisé a une précision de $2\,mm$ par $km$. Les observations considérées non corrélées sont les suivantes :

$$\begin{aligned} H_C - H_A &= 1.878\,m, \quad & AC &= 6.44\,km \\ H_D - H_A &= 3.831\,m, \quad & AD &= 3.22\,km \\ H_D - H_C &= 1.954\,m, \quad & CD &= 3.22\,km \\ H_B - H_A &= 0.332\,m, \quad & AB &= 6.44\,km \\ H_D - H_B &= 3.530\,m, \quad & BD &= 3.22\,km \\ H_C - H_B &= 1.545\,m, \quad & BC &= 6.44\,km \end{aligned}$$

L'altitude du repère $A$ est de $3.048\,m$ et non entachée d'erreurs. Calculer par compensation des observations les altitudes des repères $B, C$ et $D$ et leurs écarts-types.
3. Calculer l'écart-type de la différence d'altitudes entre les repères $C$ et $D$.
4. Donner une estimation de la précision par $km$ du nivellement effectué.

**Problème 74.** On veut étalonner un anéroide, appareil donnant la pression de l'air, par la formule :

$$D = d + \alpha t + \gamma$$

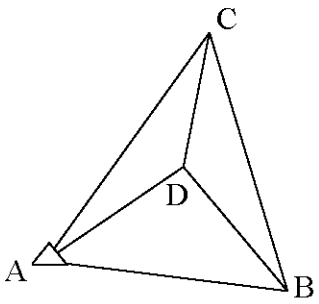



FIGURE 6 – La polygonale observée

où $\alpha, \gamma$ sont deux constantes, $t$ la température en degrés centigrades. Les paramètres $d$ et $D$ sont lus respectivement de l'anéroide et à partir d'un baromètre en mercure, et exprimés en $mm\ Hg$.

Pour déterminer $\alpha$ et $\gamma$, des lectures ont été prises à différentes températures (voir tableau 1). Ces observations sont non corrélées. L'écart-type de la lecture de $d$ est de $0.14\,mm\ Hg$ ; $t$ et $D$ sont

| $t$ | $d$ | $D$ |
|---|---|---|
| $^\circ$ Centigrade | $mm\ Hg$ | $mm\ Hg$ |
| 6.0 | 761.3 | 762.3 |
| 10.0 | 759.1 | 759.5 |
| 14.0 | 758.4 | 758.7 |
| 18.0 | 763.1 | 763.0 |

TABLE 1 – Table des observations

supposées sans erreurs.
1. Calculer par la méthode des moindres carrés les constantes $\alpha$ et $\gamma$.
2. Estimer le facteur de variance unitaire.
3. Déterminer la variance et la covariance de $\alpha$ et $\gamma$.

**Problème 75.** En statistiques, la loi normale est une famille de distributions de probabilités caractérisées par la fonction de densité :

$$p(x,\mu,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

où $\mu$ est la moyenne et $\sigma^2$ la variance. On note par $l(x,\mu,\sigma) = Log\,p(x,\mu,\sigma)$, soit :

$$l(x,\mu,\sigma) = -Log\,\sigma - \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}$$

Soit $X$ une variable aléatoire ayant comme fonction de densité $p(x,\mu,\sigma)$. On rappelle les opérateurs suivants espérance mathématique ou moyenne et variance :

$$E[f(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)p(x,\mu,\sigma)dx$$

$$V(f(X)) = E[(E[f(X)] - f(X))^2]$$

On donne la formule : $\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

1. Montrer que :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x,\mu,\sigma)dx = \mu$$

$$\sigma^2(X) = Var(X) = Cov(X,X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 p(x,\mu,\sigma)dx = \sigma^2$$

2. Montrer que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u^4 e^{-u^2} du = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}$$

3. Calculer $\frac{\partial l}{\partial \mu}\ \frac{\partial l}{\partial \sigma}$.

4. On pose $\theta = (\mu,\sigma)$. Soit $T_\theta$ l'espace engendré par $(\frac{\partial l}{\partial \mu}, \frac{\partial l}{\partial \sigma})$. On définit sur $T_\theta$ l'opérateur $< .,. >: T_\theta \times T_\theta \longrightarrow \mathbb{R}$ à $A, B$ deux variables aléatoires $\in T_\theta$ :

$$< A, B >= E[A(x)B(x)]$$

Justifier qu'on peut écrire :

$$E[A(x)B(x)] = Cov(A(x),B(x)) = E[(E[A(x)] - A(x))(E[B(x)] - B(x))]$$

5. Montrer que $< .,. >$ définit un produit scalaire sur $T_\theta$.

6. On pose : $e_1 = \frac{\partial l}{\partial \mu}$ et $e_2 = \frac{\partial l}{\partial \sigma}$. On définit le tenseur métrique sur $T_\theta$ par :

$$g_{ij} =< e_i, e_j >$$

Montrer que la matrice $g = (g_{ij})$ est donnée par :

$$g = \frac{1}{\sigma^2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

et que la première forme fondamentale sur $T_\theta$ s'écrit :

$$ds^2 = \frac{1}{\sigma^2}(d\mu^2 + 2d\sigma^2)$$

**Problème 76.** Soit un triangle de côtés $a, b, c$ et d'angles $A, B$ et $C$. On se propose :
- d'estimer $\dot{a}, \dot{b}$ et $\dot{c}$, et les variances de ces déterminations. Les observations sont :

$$\begin{cases} a = 96.48\, mm \\ b = 115.50\, mm \\ A = 63.042\, gr \\ B = 99.802\, gr \\ C = 37.008\, gr \end{cases} \tag{12.1}$$

On choisit ici comme unités normalisées le décimillimètre $(0.1\, mm)$ pour les mesures de distances, et le décimilligrade $(0.1\, gr)$ pour les angles.

On prend les poids égaux aux inverses des carrés des *emq* de chaque observation. On donne la matrice des poids $P$ :

$$P = \begin{pmatrix} 0.277 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.160 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.524 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.524 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.524 \end{pmatrix}$$

On prendra comme valeurs approchées des inconnues $a_0 = a; \quad b_0 = b; \quad c_0 = a\frac{sinC}{sinA}$.

1. Ecrire les paramètres observées et les valeurs observées des inconnues dans les nouvelles unités.
2. Soit $X = (a, b, c)$ le vecteur des inconnues. On adopte le système suivant liant les inconnues aux observables :

$$\begin{cases} \dot{a} = \dot{a} \\ \dot{b} = \dot{b} \\ Arccos\dfrac{\dot{b}^2 + \dot{c}^2 - \dot{a}^2}{2\dot{b}\dot{c}} = \dot{A} \\ Arccos\dfrac{\dot{c}^2 + \dot{a}^2 - \dot{b}^2}{2\dot{c}\dot{a}} = \dot{B} \\ Arccos\dfrac{\dot{a}^2 + \dot{b}^2 - \dot{c}^2}{2\dot{a}\dot{b}} = \dot{C} \end{cases} \tag{12.2}$$

Ceci étant, on posera pour les grandeurs à déterminer :

$$\begin{aligned} \dot{a} &= a_0 + da = a + da \\ \dot{b} &= b_0 + db = b + db \\ \dot{c} &= c_0 + dc \end{aligned}$$

et pour les grandeurs observées :

$$\begin{aligned} \dot{a} &= a + v_a \\ \dot{b} &= b + v_b \\ \dot{A} &= A + v_A \\ \dot{B} &= B + v_B \\ \dot{C} &= C + v_C \end{aligned}$$

En linearisant la troisième équation de (12.2), montrer que l'équation d'observation s'écrit :

$$\frac{1}{sinA}\frac{a_0}{b_0c_0}\frac{2000}{\pi}da - \frac{1}{sinA}\frac{a_0^2 + b_0^2 - c_0^2}{2b_0^2c_0}\frac{2000}{\pi}db - \frac{1}{sinA}\frac{a_0^2 + c_0^2 - b_0^2}{2b_0c_0^2}\frac{2000}{\pi}dc = -k_A\frac{2000}{\pi} + v_A$$

où :

$$k_A = \frac{b_0^2 + c_0^2 - a_0^2 - 2b_0c_0cosA}{2b_0c_0sinA}$$

(étant entendu qu'on exprime $v_A$ en $dcgr$).

3. Montrer que le système des moindres carrés $AX = L + V$ s'écrit :

$$\begin{pmatrix} 1. & 0. & 0. \\ 0. & 1. & 0. \\ 1.00375 & -0.83924 & 0.00143 \\ -1.00571 & 1.20285 & -0.66128 \\ 0.00094 & -0.36239 & 0.65918 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} da \\ db \\ dc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0. \\ 0. \\ 0.97981 \\ -2.88449 \\ 0.42396 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_a \\ v_b \\ v_A \\ v_B \\ v_C \end{pmatrix}$$

4. Résoudre le système précédent par la méthode des moindres carrés et montrer que la matrice normale $N = A^T PA$ est donnée par :

$$N = \begin{pmatrix} 3.35605 & -3.13044 & 1.01750 \\ - & 3.64132 & -1.57937 \\ - & - & 1.32971 \end{pmatrix}$$

5. Montrer que :

$$X = \begin{pmatrix} +0.62971 \\ -0.90962 \\ 0.9482 \end{pmatrix}$$

6. Déterminer les variances des inconnues $\sigma_a^2$, $\sigma_b^2$ et $\sigma_c^2$.

**Problème 77.** On considère $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ et on définit la fonction par :

$$f(u, v) = u^4 + 6uv + 1.5v^2 + 36v + 405$$

1. Chercher les points critiques réels de $f$.
2. Montrer que le point $x^* = (u, v) = (3, -18)$ est un point minimum de $f$.
3. Montrer que le Hessien de $f$ est une matrice définie positive si $u^2 > 1$ et indéfinie si $u^2 < 1$.
4. Montrer que la formule de récurrence de Newton s'écrit avec $J = 1.5(u_k^2 - 1)$ :

$$u_{k+1} = \frac{u_k^3 + 9}{J}, \quad v_{k+1} = -\frac{2u_k^3 + 18u_k^2}{J}$$

**Problème 78.** Soient le plan $(P)$ et la sphère $(\mathbb{S}^2)$ d'équations respectivement : $x + y + z = 1$ et $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. On veut chercher le point $M \in (\mathbb{S}^2)$ tel que sa distance au plan $(P)$ soit maximale.
1. Montrer que la distance d'un point $M(X, Y, Z)$ au plan $(P)$ est donnée par :

$$d = |X + Y + Z - 1|/\sqrt{3}$$

2. Pour répondre à la question posée ci-dessus, on considère la fonction : $E(x, y, z, \lambda) = -(x + y + z - 1)^2 - \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$. Ecrire le système d'équations donnant les points critiques de $E$ qu'on note par $(1)$.
3. Montrer que si $\lambda = -1$, on arrive à une contradiction. On suppose que $\lambda \neq -1$. Que représente le cas $\lambda = 0$.
4. On suppose que $\lambda \notin \{-3, -1, 0\}$. Résoudre le système $(1)$. Soit le point $M_2$ tel que ses coordonnées sont négatives.
5. Montrer que la matrice hessienne de $E$ pour $M_2$ s'écrit sous la forme :

$$H = \begin{pmatrix} \mu^2 & -2 & -2 \\ -2 & \mu^2 & -2 \\ -2 & -2 & \mu^2 \end{pmatrix} \quad avec \ \mu = 1 + \sqrt{3}$$

6. Si on pose $U = (X, Y, Z)^T \in (\mathbb{S}^2)$. Montrer que $U^T.H.U = 2\left[3 + \sqrt{3} - (X + Y + Z)^2\right]$. En déduire que $U^T.H.U > 0$ pour tout $U \neq 0 \in (\mathbb{S}^2)$.
7. Montrer que pour le point $M_2$, on obtient un minimum strict de $E$. A-t-on répondu à la question du problème.

# 13 Modèles Non-Linéaires de Compensation

**Problème 79.** Dans le plan affine $\mathcal{P}$, on a mesuré trois distances planes entre un point inconnu $P(X_1, X_2)$ vers trois points connus $P_i(a_i, b_i)_{i=1,3}$ dans trois directions différentes. On considère le modèle non linéaire de Gauss-Markov défini par :

$$\zeta(X) = L - e, \quad e \in \mathcal{N}(0, \Gamma)$$

avec :

- $L$ : le vecteur des observations $(3 \times 1) = (L_1, L_2, L_3)^T$ ;
- $X$ : le vecteur des inconnues $(2 \times 1) = (X_1, X_2)^T$ ;
- $e$ : le vecteur des erreurs $(3 \times 1) = (e_1, e_2, e_3)^T$ suit la loi normale $\mathcal{N}(0, \Gamma)$ avec $E(e) = 0$ et $\Gamma = E(ee^T)$ la matrice de dispersion ou variance, on prendra $\Gamma = \sigma_0^2.P^{-1}$, $P$ est la matrice des poids égale à la matrice unité $I_3$, $\sigma_0$ une constante positive ;
- $\zeta$ : est une fonction donnée injective d'un ouvert $U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par :

$$\zeta(X) = \zeta(X_1, X_2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left[(X_1 - a_1)^2 + (X_2 - b_1)^2\right] \\ \frac{1}{2}\left[(X_1 - a_2)^2 + (X_2 - b_2)^2\right] \\ \frac{1}{2}\left[(X_1 - a_3)^2 + (X_2 - b_3)^2\right] \end{pmatrix}$$

On prendra comme composante $L_i$ du vecteur observation la quantité $L_i = \dfrac{D^2_{i\,\text{observée}}}{2}$

1. Montrer que les vecteurs $\dfrac{\partial \zeta}{\partial X_1}, \dfrac{\partial \zeta}{\partial X_2}$ sont linéairement indépendants en chaque point $X \in U$.
2. Montrer que les fonctions $\dfrac{\partial^2 \zeta}{\partial X_i \partial X_j}$ sont continues sur $U$ pour $i, j \in \{1, 2\}$.
3. On pose : $J = \|L - \zeta(X)\|^2$. Calculer les coefficients de la matrice $(\dfrac{\partial^2 J}{\partial X_i \partial X_j}), i, j \in \{1, 2\}$.
4. Soit la matrice carrée définie par :

$$g(X) = (g_{ij}) \quad \text{avec } g_{ij} = < \frac{\partial \zeta(X)}{\partial X_i}, \frac{\partial \zeta(X)}{\partial X_j} > \quad \begin{cases} i = 1, 2 \\ j = 1, 2 \end{cases}$$

Calculer les coefficients $g_{ij}$.

5. Introduisons la matrice $B$ définie par :

$$B(X, L) = (B_{ij}) \quad \text{avec } B_{ij} = g_{ij} - < L - \zeta(X), \frac{\partial^2 \zeta}{\partial X_i \partial X_j} > \quad \begin{cases} i = 1, 2 \\ j = 1, 2 \end{cases}$$

Calculer les éléments de la matrice $B$ et montrer qu'elle est définie positive.

Deuxième partie

# LES CORRECTIONS

# 14 Topographie

**Correction 1.** Appelons $C$ le point central de l'antenne. D'après les données, on obtient par calcul les éléments suivants :

a1. Distance $AB = \sqrt{(X_A - X_B)^2 + (Y_A - Y_B)^2} = 795.55\,m$,

a2. Gisement $AB = G_{AB} = 100\,gr + Arctg\dfrac{Y_A - Y_B}{X_B - X_A} = 100.0000 + 81.4453 = 181.4453\,gr$,

a3. Gisement $AC = G_{AB} - \widehat{A} = 181.4453 - 73.3333 = 108.1120\,gr$,

a4. Gisement $BC = G_{BA} + \widehat{B} = 381.4453 + 96.6667 = 78.1120\,gr$,

a5. Angle $\widehat{C} = 200.0000\,gr - (\widehat{A} + \widehat{B}) = 30.0000\,gr$

**Correction 2.** 1. On a :

$$\alpha_m = \frac{\sum_{i=1}^{i=4}\alpha_i}{4} \Longrightarrow 2_{\alpha_m} = \frac{\sum_{i=1}^{i=4} 2_{\alpha_i}}{16} = \frac{42_\alpha}{16} = \frac{2_\alpha}{4} \Longrightarrow$$
$$\alpha_m = \frac{\alpha}{2} = \frac{12}{2} = 6\,dmgr$$

2. La distance $D$ est donnée par :

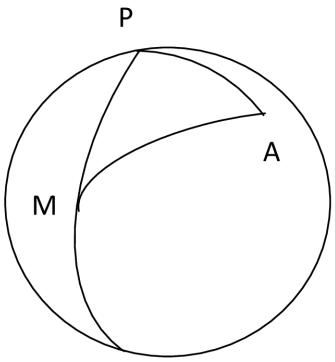
$$tg(\alpha/2) = \frac{l/2}{D} \Longrightarrow D = \frac{l}{2}cotg\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

Calculons la différentielle $dD$ en fonction de $d\alpha$, $l$ la longueur de la stadia est sans erreur et $l = 2\,m$ :

$$dD = d\left(\frac{l}{2}cotg\frac{\alpha}{2}\right) = -\frac{l}{4}\frac{d\alpha}{sin^2(\alpha/2)} \Longrightarrow$$
$$2_D = \frac{l}{16}\frac{2_\alpha}{sin^4(\alpha/2)} \Longrightarrow D = \frac{l}{4}\frac{\alpha}{sin^2(\alpha/2)} = \frac{l}{4}\frac{2\alpha_m}{sin^2(\alpha/2)} = \frac{l}{2}\frac{\alpha_m}{sin^2(\alpha/2)} \Longrightarrow$$
$$D = \frac{l}{2}\left(1 + cotg^2\frac{\alpha_m}{2}\right)\alpha_m$$

3. On obtient :

$$D = \frac{l}{2}\left(1 + cotg^2\frac{\alpha_m}{2}\right)\alpha_m = \frac{l}{2}\left(1 + \left(\frac{2D}{l}\right)^2\right)\alpha_m \quad \Longrightarrow$$
$$D = (1 + 101.53^2) \times 3 \times 10^{-6}.\pi = 0.097\,m = 9.7\,cm$$



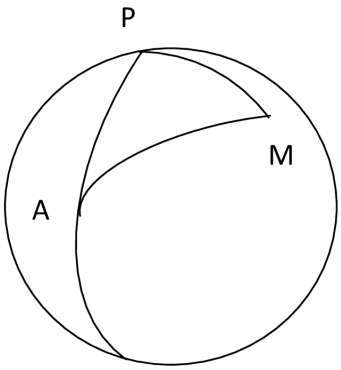

PA = π/2-δ,

PM = π/2-φ,

MA = z,

Angle PMA = Az

FIGURE 7 – Triangle sphérique




PA = π/2-δ,

PM = π/2-φ,

MA = z=π/2,

Angle MPA =-AH

FIGURE 8 – Triangle de position

# 15 Astronomie

## 15.1 Trigonométrie Sphérique

**Correction 3.** On applique la formule fondamentale $cosa = cosbcosc + sinbsinccosA$, on obtient :

$$cos\left(\frac{\pi}{2}-\delta\right) = coszcos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right) + sinzsin\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)cosAz \Longrightarrow$$
$$cosAz = \frac{sin\delta - coszsin\varphi}{sinzcos\varphi} \Longrightarrow \boxed{Az = 20°20'40".25} \tag{15.1}$$

**Correction 4.** On applique la formule fondamentale $cosa = cosbcosc + sinbsinccosA$, on obtient :

$$cosz = cos\left(\frac{\pi}{2}-\delta\right)cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right) + sin\left(\frac{\pi}{2}-\delta\right)sin\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)cos(-AH) \Longrightarrow$$
$$0 = sin\varphi sin\delta + cos\varphi cos\delta cosAH \Longrightarrow \boxed{cosAH = -tg\varphi tg\delta} \tag{15.2}$$

**Correction 5.** 1. $\alpha = \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 200.00045\,gr = 4.5\,dmgr$

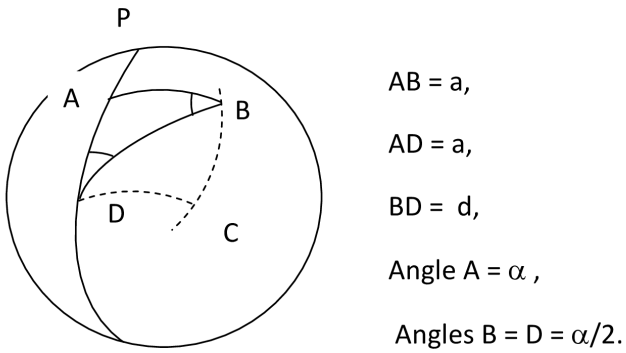



FIGURE 9 – Le carré sphérique

2. $\epsilon^{rd} = \dfrac{\text{aire triangle ABC}}{R^2}$ où $R = 6\,368\,km$ le rayon moyen de la Terre. D'où :

$$\epsilon^{rd} = \frac{\text{aire triangle ABC}}{R^2} = \frac{AB.AC.sinA}{2R^2} = 5.21654 \times 10^{-6} = \frac{5.21654 \times 2}{\pi} = 3.3\,dmgr$$

3.

$$f = \alpha - 200.0000\,0\,gr - \epsilon = 200.00045 - 200.0000\,0 - 200.0003\,3 \Longrightarrow \boxed{f = 1.2\,dmgr}$$

**Correction 6.** 1. Soit $d$ la diagonale liant les sommets B et D. C'est aussi une bissectrice, dans le triangle sphérique ABD, On va appliquer la formule en cotg soit :

$$sinA.cotgB = cotgb.sinc - cosc.cosA$$

ce qui donne :

$$sin\alpha.cotg\tfrac{\alpha}{2} = cotga.sina - cosa.cos\alpha \Longrightarrow$$
$$2cos^2\tfrac{\alpha}{2} = cosa - cosa.cos\alpha = cosa.(1 - cos\alpha) = 2cosa.sin^2\frac{\alpha}{2} \Longrightarrow$$
$$\boxed{cosa = cotg^2\frac{\alpha}{2}} \tag{15.3}$$

2. La formule des sinus donne :

$$\frac{sind}{sin\alpha} = \frac{sina}{sin\alpha/2} \Longrightarrow \boxed{sind = 2sina.cos\tfrac{\alpha}{2} = 2cos\tfrac{\alpha}{2}.\sqrt{1 - cotg^4\frac{\alpha}{2}}}$$

**Correction 7.** 1. Le triangle sphérique PMH est rectange en H. On appplique la régle de Neper. Soit :

$$cos\left(\frac{\pi}{2} - H\right) = sin\lambda.sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) \Longrightarrow$$
$$\boxed{sinH = sin\lambda.cos\varphi} \tag{15.4}$$

On peut utiliser la formule des sinus :

$$\frac{sinH}{sin\lambda} = \frac{sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)}{sin\pi/2} \Longrightarrow \boxed{sinH = sin\lambda.cos\varphi}$$

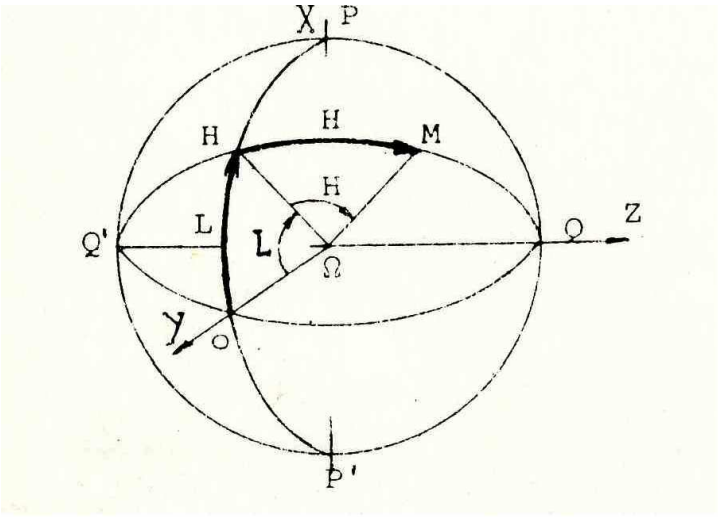



FIGURE 10 – Les coordonnées de Cassini-Soldner

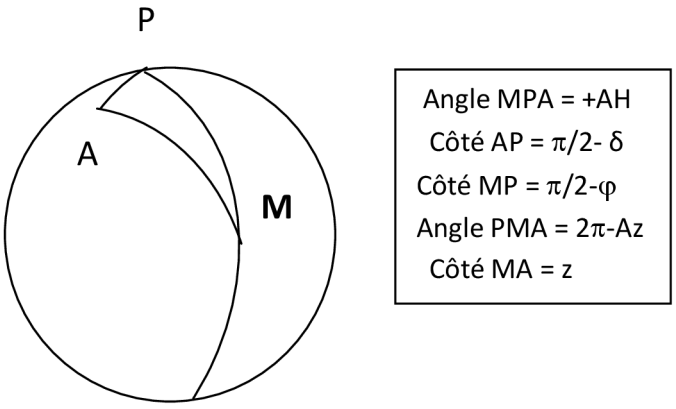



FIGURE 11 – Les éléments du triangle sphérique PAM.

Pour calculer $L$, On utilise la régle de Neper, d'où :

$$cos\lambda = cotgL.cotg\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right) \Longrightarrow \boxed{tgL = \frac{tg\varphi}{cos\lambda}}$$

2. Inversement, pour calculer $\varphi$, On utilise la régle de Neper, d'où :

$$cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right) = sinL.sin\left(\frac{\pi}{2}-H\right) \Longrightarrow \boxed{sin\varphi = sinL.cosH}$$

Quant à $\lambda$, on applique la formule en cotg soit $sinA.cotgB = cotgb.sinc - cosc.cosA$ ce qui donne :

$$sin\frac{\pi}{2}.cotg\lambda = cotgH.sin\left(\frac{\pi}{2}-L\right) - cos\left(\frac{\pi}{2}-L\right)cos(\pi/2) \Longrightarrow \boxed{tg\lambda = \frac{tgH}{cosL}}$$

**Correction 8.** 1. Les éléments du triangle sphérique PAM sont donnés par la figure (11) ci-dessus.

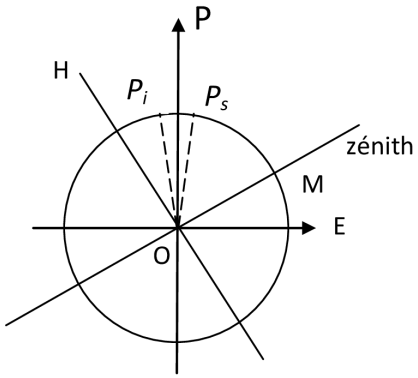



FIGURE 12 – Calcul des hauteurs $h_1$ et $h_2$.

2. L'angle horaire est obtenu à partir de la formule :

$$HSL = AH + \alpha \Longrightarrow AH = HSL - \alpha \Longrightarrow \boxed{AH = 4^h.4241\,1667 = 4h\,25mn\,26.82s}$$

3. On applique la formule en cotg soit $sinA.cotgB = cotgb.sinc - cosc.cosA$. Comme $AH$ est positif et inférieur à $\pi$, donc l'astre se trouve à gauche, on a les éléments pour appliquer la formule :

- $\hat{A} = \hat{P} = AH$,
- $\hat{B} = \hat{M} = 2\pi - Az$,
- $b = \pi/2 - \delta$,
- $c = \pi/2 - \varphi$.

Ce qui donne :

$$sinAH.cotg(2\pi - Az) = cotg(\pi/2 - \delta).sin(\pi/2 - \varphi) - cos(\pi/2 - \varphi).cosAH \Longrightarrow$$
$$-sinAzcotg(Az) = tg\delta cos\varphi - sin\varphi cosAH \Longrightarrow$$
$$tgAz = \frac{sinAH}{cosAHsin\varphi - cos\varphi tg\delta}$$

4. Numériquement, on a $\boxed{Az = 358°49'51.996"}$.

5. A partir de la figure (11), la distance zénithale est donnée par le côté $MA$. On applique la formule fondamentale $cosa = cosbcosc + sinbsinccosA$, on obtient :

$$cosz = cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)cos\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) + sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)sin\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right)cosAH \Rightarrow$$
$$cosz = sin\varphi sin\delta + cos\varphi cos\delta cosAH \Rightarrow \boxed{z = 51°36'17".31}$$

# 16 Astronomie de Position

**Correction 9.** On a les données suivantes :

- $\varphi = 36°54'$ Nord,
- $\delta = +89°$.

A partir de la figure (12), on obtient :

- $h_1 = \varphi + \left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) = \frac{\pi}{2} + \varphi - \delta \Rightarrow h_1 = 90° + 36°54' - 89° = 37°54'$.

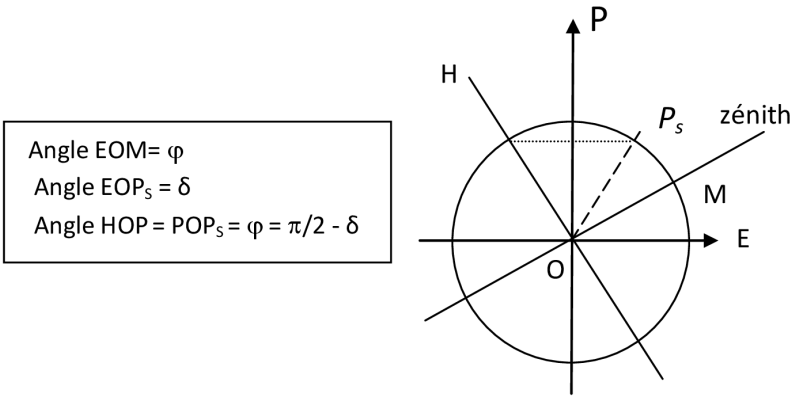



FIGURE 13 – Le lieu des étoiles toujours visibles

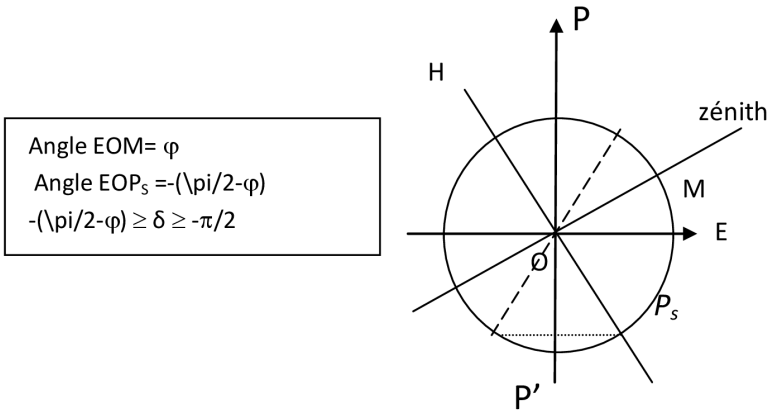



FIGURE 14 – Le lieu des étoiles toujours non visibles

- $h_2 = \varphi - \left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) = \varphi + \delta - \frac{\pi}{2} + \delta \Rightarrow h_2 = 36°54' + 89° - 90° = 35°54'.$

**Correction 10.** On traite le cas : lieu dans l'hémisphère nord.

1. - Le lieu des étoiles qui sont toujours visibles : à partir de la figure (13), les étoiles de déclinaison $\delta = \pi/2 - \varphi$ sont toujours visibles au lieu de latitude $\varphi$.

- Les étoiles qui ne sont jamais visibles ont pour déclinaisons $\delta$ telles que : $-\pi/2 \leq \delta \leq -(\pi/2 - \varphi)$ (voir **Fig.**14).

2. La condition pour qu'une étoile culmine au zénith est donnée par : $\delta = \varphi$, (voir **Fig.**15).

3a. Au moment des équinoxes, l'ecliptique coupe l'équateur donc $\delta = 0$, l'orbite du soleil est un grand cercle dans l'équateur et la trace de l'horizon d'un lieu quelconque coupe l'équateur en passant par le centre de la terre, par suite la durée du jour est égale à celle de la nuit, (voir **Fig.**16).

3b. En un lieu $M$ à l'équateur $\varphi = 0$. Quelle que soit la date, le soleil a pour déclinaison $-\epsilon \leq \delta \leq +\epsilon$, $\epsilon = -23°27'$, par suite le jour et la nuit ont une durée égale (voir **Fig.**17).

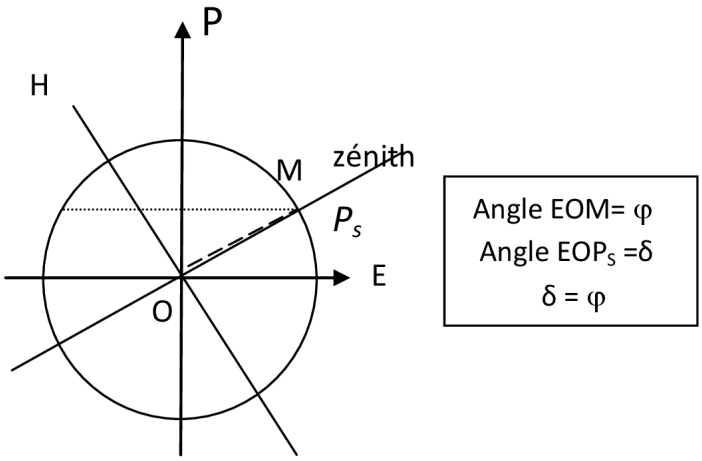



FIGURE 15 – La condition pour qu'une étoile culmine au zénith

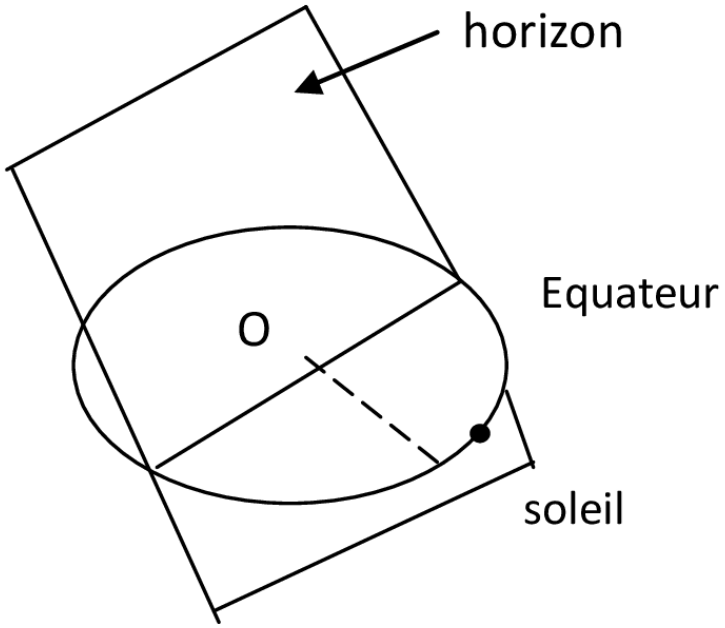



FIGURE 16 – Egalité du jour et de la nuit

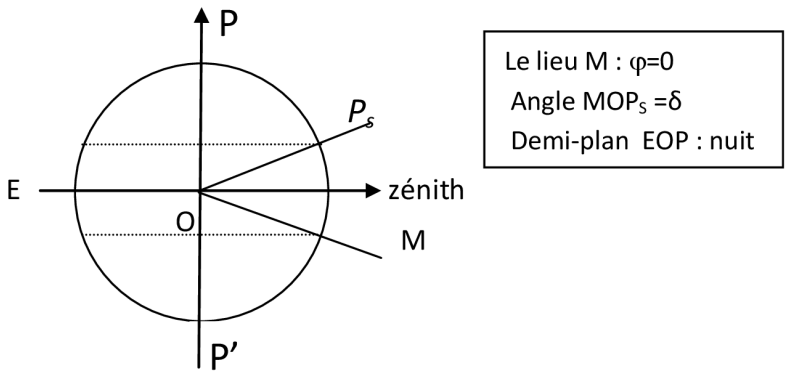



FIGURE 17 – Egalité du jour et de la nuit en tout lieu sur l'équateur

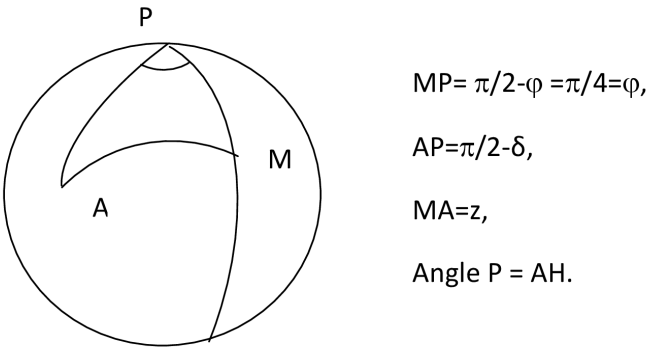



FIGURE 18 – Position de l'astre *A* lors du lever

**Correction 11.** 1a. Pour calculer l'heure sidérale locale du lever, on commence par calculer l'angle horaire de l'astre *A* au lever. Dans ce cas, on considère le triangle sphérique MPA, (voir **Fig. 18**). On obtient z=$\pi/2$ lors du lever et on part de la formule :

$$cosz = cos\varphi cos\left(\frac{\pi}{2}-\delta\right)+sin\varphi sin\left(\frac{\pi}{2}-\delta\right).cosAH \Longrightarrow$$

$$cosz = 0 = cos\varphi sin\delta + sin\varphi cos\delta cosAH \Longrightarrow cosAH = -\frac{tg\delta}{tg\varphi} = -tg\delta \Longrightarrow$$

$$AH = 125°.2653\,8968 = 8\,h\,21\,mn\,03.4535\,s$$

Par la formule fondamentale de l'astronomie de position, on a $HSL = AH + \alpha$. D'où $HSL_L = 8\,h\,21\,mn\,03.4535\,s + 11\,h\,13\,mn = 19\,h\,33\,mn\,03.4535\,s$.

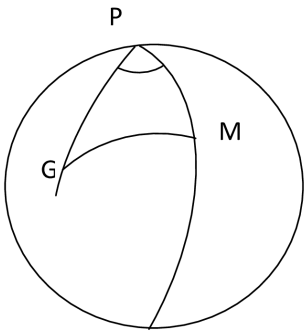
1b. Comme l'observation a été faite le jour de l'équinoxe de printemps le 21 mars à 0 heure TU, l'heure sidérale locale du coucher de l'astre *A* est $HSL_C = HSL_L + 12\,h = 11\,h\,13\,mn + 12\,h = 23\,h\,13\,mn$.

2a. Nous avons la formule :

$$HSL = HSG_{0hTU} + k.TU + \lambda, \quad k = \frac{366.2422}{265.2422}$$

On obtient alors $TU$ :

$$TU = (HSL - HSG_{0hTU} - \lambda).\frac{365.2422}{366.2422}$$




MP= π/2-φ,

GP=π/2-δ,

MG=z,

Angle P = AH'=|AH|,

Angle interne M=Az',

Azimut de M vers G : Az=2π-Az'.

FIGURE 19 – Observation de la galaxie Andromède

Numériquement, on a l'heure $TU_L$ du lever au lieu considéré :

$$TU_L = (HSL_L - HSG_{0hTU} - \lambda).\frac{365.2422}{366.2422} \Longrightarrow$$

$$TU_L = (19\,h\,33\,mn\,03.4535\,s - 11\,h\,52\,mn - 7\,h\,20\,mn).\frac{365.2422}{366.2422} \Longrightarrow$$

$$TU_L = (21\,mn\,03.4535\,s).\frac{365.2422}{366.2422} = 21\,mn\,0.0037\,s$$

2b. On obtient l'heure $TU_C$ du coucher au lieu considéré :

$$TU_C = (23\,h\,13\,mn - 11\,h\,52\,mn - 7\,h\,20\,mn).\frac{365.2422}{366.2422} \Longrightarrow$$

$$TU_C = (4\,h\,01\,mn).\frac{365.2422}{366.2422} = 4\,h\,00\,mn\,20.52\,s$$

**Correction 12.** 1. L'heure sidérale locale $HSL$ est donnée par :

$$HSL = HSG_{0hTU} + k.TU + \lambda, \quad k = \frac{366.2422}{365.2422}$$

Soit :

$$HSL = 20\,h\,35\,mn\,28\,s + 0\,h\,20\,mn\,57\,s + 21.\frac{366.2422}{365.2422} \Longrightarrow$$

$$HSL = 20\,h\,56\,mn\,25\,s + 21\,h\,03\,mn\,26.9859\,s = 17\,h\,56\,mn\,51.9859\,s$$

2. L'angle horaire de la galaxie $AH$ est donné par :

$$HSL = AH + \alpha ZZ \Longrightarrow AH = HSL - \alpha = 17\,h\,56\,mn\,51.9859\,s - 0\,h\,40\,mn = 17\,h\,16\,mn\,51.9859\,s$$

Comme $AH > 12\,h$, on peut écrire $AH = -AH' = -6\,h\,43\,mn\,8.0141\,s = -100°.7833\,9209$ avec $AH' > 0$, la position de la galaxie est représentée dans la figure (19).

3. La distance zénithale de la galaxie à $21\,h\,TU$ est obtenue par la formule :

$$cosz = cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)cos\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) + sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)sin\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right).cosAH' \Longrightarrow$$

$$cosz = sin\varphi sin\delta + cos\varphi cos\delta.cosAH' \Longrightarrow$$

$$cosz = 0.3493\,8580 \Longrightarrow z = 69^\circ.5502\,4748$$

4. On calcule l'angle $Az'$ par la formule des sinus :

$$\frac{sinAH'}{sinz} = \frac{sinAz'}{sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)} \Longrightarrow sinAz' = cos\varphi . \frac{sinAH'}{sinz} = 0.7602\,2783 \Longrightarrow Az' = 49^\circ.4842\,87$$

On obtient alors $Az$ :

$$Az = 2\pi - Az' = 360^\circ - 49^\circ.4842\,87 = 310^\circ.5157\,13$$

# 17 Courbes et Théorie des Surfaces

## 17.1 Courbes

**Correction 13.** 1. Le vecteur $T$ est défini par $T = \frac{dM}{ds} = \left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}\right)^t$. Calculons $ds$. On obtient facilement :

$$ds^2 = a^2(sin^2t + cos^2t)dt^2 + b^2dt^2 = (a^2 + b^2)dt^2 \Rightarrow ds = \sqrt{a^2 + b^2}dt,\ dt > 0$$

d'où :

$$T = \frac{dM}{ds} = \begin{pmatrix} \frac{-asint}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \frac{acost}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{pmatrix}$$

le calcul du vecteur $N$ nécessite le calcul du vecteur $dT/ds$, on obtient :

$$\frac{dT}{ds} = \frac{dT}{dt}\frac{dt}{ds} = \begin{pmatrix} \frac{-acost}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \frac{-asint}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-acost}{a^2+b^2} \\ \frac{-asint}{a^2+b^2} \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\| \frac{dT}{ds} \right\| = \frac{a}{a^2+b^2} \Longrightarrow N = \frac{\frac{dT}{ds}}{\left\| \frac{dT}{ds} \right\|}$$

Soit $N = \begin{pmatrix} -cost \\ -sint \\ 0 \end{pmatrix}$.

Le vecteur $B$ de la binormale est telle que $B = T \wedge N$. D'où :

$$B = \begin{pmatrix} \frac{-asint}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \frac{acost}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -cost \\ -sint \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \begin{pmatrix} bsint \\ -bcost \\ a \end{pmatrix}$$

2. La courbure $1/R$ est donnée par :

$$\frac{1}{R} = \left\| \frac{dT}{ds} \right\| = \frac{a}{a^2+b^2} \Longrightarrow R = a\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right)$$

3. La torsion $\frac{1}{\tau}$ est telle que $\frac{dB}{ds}=-\frac{1}{\tau}N$. Calculons $dB/ds$. On obtient facilement :

$$\frac{dB}{ds}=\frac{-b}{a^2+b^2}\begin{pmatrix}-cost\\-sint\\0\end{pmatrix}=-\frac{b}{a^2+b^2}N=-\frac{1}{\frac{a^2+b^2}{b}}N\Longrightarrow\tau=\frac{a^2+b^2}{b}$$

**Correction 14.** Soit la courbe $(C)$ définie par les formules :

$$M\begin{cases}x=at^2\\y=at^3\\z=\frac{9}{16}at^4\end{cases}\quad\text{avec}\quad a>0$$

1. On prend $t\geq 0\Longrightarrow y\geq 0$ ainsi la condition demandée est vérifiée. On a $ds^2=dx^2+dy^2+dz^2$ d'où :

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=x'^2+y'^2+z'^2=4a^2t^2+9a^2t^4+\frac{9^2}{4^2}a^2t^6=a^2t^2\left(2+\frac{9}{4}t^2\right)^2\Rightarrow$$

$$\frac{ds}{dt}=at\left(2+\frac{9}{4}t^2\right)\quad t\geq 0\Longrightarrow s=a\int_0^t(2u+\frac{9}{4}u^3)du=a\left[u^2+\frac{9}{16}u4\right]_0^t=a\left(t^2+\frac{9}{16}t^4\right)\Rightarrow$$

$$s=at^2\left(1+\frac{9}{16}t^2\right)$$

2. - Le calcul du vecteur $T$ :

$$T=\frac{dM}{ds}=\frac{dM}{dt}\frac{dt}{ds}=\frac{4}{at(8+9t^2)}\begin{pmatrix}2at\\3at^2\\\frac{9}{4}at^3\end{pmatrix}=\frac{1}{8+9t^2}\begin{pmatrix}8\\12t\\9t^2\end{pmatrix}$$

- Le calcul du vecteur N. Commençons par calculer le vecteur $dT/dt$. On obtient avec $t>0$, $2t^2+8>0$ :

$$\frac{dT}{dt}=\frac{1}{(9t^2+8)^2}\begin{pmatrix}-2^4\times3^2t\\-2^2\times3^3t^2+2^5\times3\\2^4\times3^2t\end{pmatrix},\quad\frac{dt}{ds}=\frac{4}{at(9t^2+8)}\Longrightarrow$$

$$\frac{dT}{ds}=\frac{4}{at(9t^2+8)^3}\begin{pmatrix}-2^4\times3^2t\\-2^2\times3^3t^2+2^5\times3\\2^4\times3^2t\end{pmatrix}\Rightarrow\left\|\frac{dT}{ds}\right\|=\frac{3\times4^2}{at(9t^2+8)^2}\tag{17.1}$$

$$N=\frac{\frac{dT}{ds}}{\left\|\frac{dT}{ds}\right\|}=\frac{4}{at(9t^2+8)^3}.\frac{at(9t^2+8)^2}{3\times4^2}\begin{pmatrix}-2^4\times3^2t\\-2^2\times3^3t^2+2^5\times3\\2^4\times3^2t\end{pmatrix}\Longrightarrow$$

$$N=\frac{1}{9t^2+8}.\begin{pmatrix}-12t\\-9t^2+8\\12t\end{pmatrix}$$

- Le vecteur $B$ de la binormale est telle que $B=T\wedge N$. D'où :

$$B=T\wedge N=\frac{1}{8+9t^2}\begin{pmatrix}8\\12t\\9t^2\end{pmatrix}\wedge\frac{1}{9t^2+8}.\begin{pmatrix}-12t\\-9t^2+8\\12t\end{pmatrix}=\frac{1}{9t^2+8}\begin{pmatrix}9t^2\\-12t\\8\end{pmatrix}$$

3. Le rayon de courbure $R$ est défini par $\frac{1}{R} = \left\| \frac{dT}{ds} \right\|$. Cette dernière expression est donnée par l'équation (17.1) ci-dessus, d'où :

$$R = \frac{at}{48(9t^2+8)^2}$$

Soit $O$ le centre de courbure, ses coordonnées sont données par :

$$OO' = OM + MO' = OM + R.N \Longrightarrow \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} at^2 \\ at^3 \\ \frac{9}{16}at^4 \end{pmatrix} + \frac{at}{48(9t^2+8)^3}.\begin{pmatrix} -12t \\ -9t^2+8 \\ 12t \end{pmatrix}$$

4. La torsion en $M$ est obtenue par $\frac{dB}{ds} = -\frac{1}{\tau}N$. Calculons $dB/ds$. On obtient facilement :

$$B = \frac{1}{9t^2+8}\begin{pmatrix} 9t^2 \\ -12t \\ 8 \end{pmatrix} \Longrightarrow \frac{dB}{dt} = \frac{12}{(9t^2+8)^2}\begin{pmatrix} 12t \\ 9t^2-8 \\ -12t \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\frac{dB}{ds} = \frac{dB}{dt}.\frac{dt}{ds} = \frac{4}{at(9t^2+8)}.\frac{12}{(9t^2+8)^2}\begin{pmatrix} 12t \\ 9t^2-8 \\ -12t \end{pmatrix} = \frac{-48}{at(9t^2+8)^3}.\begin{pmatrix} -12t \\ -9t^2+8 \\ 12t \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\frac{dB}{dt} = -\frac{1}{\frac{at(9t^2+8)^2}{48}}.N \Longrightarrow \tau = \frac{at(9t^2+8)^2}{48}$$

## 17.2 Théorie des surfaces

**Correction 15.** Soit $(\Gamma)$ la surface paramétrée par $(u,v)$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que :

$$M(u,v)\begin{cases} X = u(1-u^2)cosv \\ Y = u(1-u^2)sinv \\ Z = 1-u^2 \end{cases}$$

1. Calculons les différentielles $dX, dY$ et $dZ$, d'où :

$$dM\begin{cases} dX = (1-3u^2)cosv.du - u(1-u^2)sinv.dv \\ dY = (1-3u^2)sinv.du + u(1-u^2)cosv.dv \\ dX = -2u.du \end{cases} \Longrightarrow ds^2 = dX^2 + dY^2 + dZ^2 \Longrightarrow$$

$$ds^2 = [(1-3u^2)^2 + 4u^2]du^2 + u^2(1-u^2)^2dv^2 \Longrightarrow ds^2 = (9u^4 - 2u^2 + 1)du^2 + u^2(1-u^2)^2dv^2$$

2. On a $u^2 = 1-Z$ et $X^2+Y^2 = u^2(1-u^2)^2$ d'où : $X^2+Y^2 = (1-Z)Z^2$. Donc la surface $(\Gamma)$ est une surface de troisième degré.

**Correction 16.** Soit la surface d'Enneper :

$$M(u,v)\begin{cases} X = u - \frac{u^3}{3} + uv^2 \\ Y = v - \frac{v^3}{3} + vu^2 \\ Z = u^2 - v^2 \end{cases}$$

1. Calculons les vecteurs $M'_u, M'_v$ :

$$M'_u\begin{cases} 1-u^2+v^2 \\ 2uv \\ 2u \end{cases}, \quad M'_v\begin{cases} 2uv \\ 1-v^2+u^2 \\ -2v \end{cases}$$

On a :

$$ds^2 = dM.dM = (M'_u du + M'_v dv).(M'_u du + M'_v dv) = M'_u.M'_u du^2 + 2M'_u.M'_v dudv + M'_v.M'_v dv^2$$

Par suite :

$$M'_u.M'_u = ||M'_u||^2 = (1-u^2+v^2)^2 + 4u^2v^2 + 4u^2 = (1+u^4+v^4-2u^2+2v^2-2u^2v^2) + 4u^2v^2 + 4u^2$$
$$M'_u.M'_u = 1+u^4+v^4+2u^2+2v^2+2u^2v^2 = (1+u^2+v^2)^2$$
$$M'_v.M'_v = ||M'_v||^2 = 4u^2v^2 + (1+u^2-v^2)^2 + 4v^2 = 4u^2v^2 + (1+u^4+v^4+2u^2-2v^2-2u^2v^2) + 4v^2$$
$$M'_v.M'_v = 1+u^4+v^4+2^u2+2v^2+2u^2v^2 = (1+u^2+v^2)^2$$
$$M'_u.M'_v = 2uv.(1-u^2+v^2) + 2uv(1-v^2+u^2) - 4uv = 2uv(1+1) - 4uv \Longrightarrow$$
$$M'_u.M'_v = 4uv - 4uv = 0 \Longrightarrow M'_u \perp M'v$$

On a obtenu : $ds^2 = (1+u^2+v^2)^2(du^2+dv^2)$ la première forme fondamentale, par suite $E = G = (1+u^2+v^2)^2$ et $F = 0$.

2. Posons $\mathcal{N} = M'_u \wedge M'_v$ et $n = \dfrac{\mathcal{N}}{||\mathcal{N}||}$ donc $n$ est un vecteur unitaire normal à la surface d'Enneper.
On obtient alors :

$$\mathcal{N} = \begin{vmatrix} 1-u^2+v^2 \\ 2uv \\ 2u \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 2uv \\ 1-v^2+u^2 \\ -2v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2u(1+u^2+v^2) \\ +2v(1+u^2+v^2) \\ (1+u^2+v^2)(1-u^2-v^2) \end{vmatrix} = (1+u^2+v^2)\begin{vmatrix} -2u \\ +2v \\ 1-u^2-v^2 \end{vmatrix}$$
$$\Longrightarrow n = \frac{1}{1+u^2+v^2}\begin{vmatrix} -2u \\ +2v \\ 1-u^2-v^2 \end{vmatrix}$$

3. D'après le cours de géodésie (A. Ben Hadj Salem, 2017), la courbure moyenne $H$ en un point d'une surface est donnée par la formule suivante :

$$H = \text{Trace de la matrice } g^{-1}.\Phi$$

où :

$$g = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}, \quad \Phi = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$$

avec $L, M, N$ sont les coefficients de la deuxième forme fondamentale $Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$. On obtient :

$$g^{-1}.\Phi = \frac{1}{E}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} = \frac{1}{E}\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \Longrightarrow H = \frac{L+N}{E}$$

Calculons maintenant $L$ et $N$ :

$$M''_{uu}\begin{cases} -2u \\ 2v \\ 2 \end{cases}, \quad M''_{vv}\begin{cases} 2u \\ -2v \\ -2 \end{cases}$$

$$L = M''_{uu}.n = \frac{2u^2+2v^2+2}{1+u^2+v^2} = +2$$

$$N = M''_{vv}.n = \frac{-2u^2-2v^2-2}{1+u^2+v^2} = -2 \Longrightarrow$$

$$H = \frac{0}{(1+u^2+v^2)^2} = 0 \text{ donc la courbure moyenne est nulle en tout point.}$$

**Correction 17.** 1. La métrique de la surface est donnée par :

$$ds^2 = A^2du^2 + B^2dv^2, \quad A = A(u,v), \quad B = B(u,v)$$

qu'on peut écrire $ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$ avec $E = A^2, G = B^2$ et $F = 0$. Donc les courbes coordonnées $u = constante$ et $v = constante$ sont orthogonales. On écrit le déplacement infinitésimal d'un point $M$ sous la forme $dM = Adu.e_1 + Bdv.e_2$ où $(e_1, e_2)$ est une base orthonormée du plan tangent au point $M$ ce qui donne $ds^2 = A^2du^2 + Bdv^2$. Introduisons la notation des formes différentielles, on obtient :

$$\omega_1 = Adu, \ \omega_2 = Bdv \Longrightarrow \omega_1 \wedge \omega_2 = ABdu \wedge dv$$

où $\wedge$ désigne le produit extérieur des formes. Par suite :

$$d\omega_1 = d(A.du) = dA \wedge du = \left(\frac{\partial A}{\partial u}du + \frac{\partial A}{\partial v}dv\right) \wedge du = \frac{\partial A}{\partial u}du \wedge du + \frac{\partial A}{\partial v}dv \wedge du = -\frac{\partial A}{\partial v}du \wedge dv$$

$$d\omega_1 = -\frac{\partial A}{\partial v}du \wedge dv$$

$$d\omega_2 = d(B.dv) = dB \wedge dv = \frac{\partial B}{\partial u}du \wedge dv$$

Cependant, selon le théorème fondamental de la géométrie riemannienne locale, il existe une forme différentielle unique $\omega_{12}$ définie dans le plan tangent du point qui satisfait les équations (S.S Chern, 1985 ; H. Cartan, 1973) :

$$d\omega_1 = \omega_{12} \wedge \omega_2 \tag{17.2}$$

$$d\omega_2 = \omega_1 \wedge \omega_{12} \tag{17.3}$$

$$\text{et} \quad d\omega_{12} = -K\omega_1 \wedge \omega_2 \tag{17.4}$$

avec $K$ la courbure totale ou la courbure de Gauss au point $M$. Ecrivons :

$$\omega_{12} = \lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2$$

De l'équation(17.2), on obtient :

$$\omega_{12} \wedge \omega_2 = d\omega_1 \Longrightarrow (\lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2) \wedge \omega_2 = \lambda_1\omega_1 \wedge \omega_2 = -\frac{\partial A}{\partial v}du \wedge dv \Longrightarrow$$

$$\lambda_1 AB.du \wedge dv = -\frac{\partial A}{\partial v}du \wedge dv \Longrightarrow \lambda_1 = -\frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial v}$$

De l'équation(17.3), on obtient :

$$\omega_1 \wedge \omega_{12} = d\omega_2 \Longrightarrow \omega_1 \wedge (\lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2) = \lambda_2\omega_1 \wedge \omega_2 = d\omega_2 = \frac{\partial B}{\partial u}du \wedge dv \Longrightarrow$$

$$\lambda_2 AB.du \wedge dv = \frac{\partial B}{\partial u}du \wedge dv \Longrightarrow \lambda_2 = \frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial u}$$

On a obtenu $\omega_{12}$ :

$$\omega_{12} = \lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2 = -\frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial v}\omega_1 + \frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial u}\omega_2 \Longrightarrow$$

$$\omega_{12} = -\frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial v}Adu + \frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial u}Bdv = -\frac{A'_v}{B}du + \frac{B'_u}{A}dv$$

Calculons $d\omega_{12}$ et utilisant l'équation (17.4) :

$$d\omega_{12} = -\left(\frac{A'_v}{B}\right)_v dv \wedge du + \left(\frac{B'_u}{A}\right)_u du \wedge dv = \left[\left(\frac{A'_v}{B}\right)_v + \left(\frac{B'_u}{A}\right)_u\right]du \wedge dv = -K.AB.du \wedge dv$$

D'où :

$$K = -\frac{1}{AB}\left[\left(\frac{A'_v}{B}\right)_v + \left(\frac{B'_u}{A}\right)_u\right]$$

C.Q.F.D

**Correction 18.** On définit une surface $(S)$ par les équations :

$$M(u,v)\begin{cases} X=u^2+v \\ Y=u+v^2 \\ Z=uv \end{cases}$$

1. On obtient les composantes des vecteurs $\boldsymbol{OM}'_u$ et $\boldsymbol{OM}'_v$ :

$$M'_u\begin{cases} 2u \\ 1 \\ v \end{cases}, \quad M'_v\begin{cases} 1 \\ 2v \\ u \end{cases}$$

2. Calculons les coefficients $E,F,G$ de la première forme fondamentale de la surface $(S)$ :

$$\begin{cases} E=||M'_u||^2=4u^2+v^2+1 \\ F=M'_u.M'_v=2(u+v)+uv \\ G=||M'_v||^2=4v^2+u^2+1 \end{cases}$$

3. L'expression de $ds^2$ est :

$$ds^2=Edu^2+2Fdudv+Gdv^2=(4u^2+v^2+1)du^2+2(2(u+v)+uv)dudv+(4v^2+u^2+1)dv^2$$

4. Les coordonnées $(u,v)$ ne sont pas orthogonales car $F\neq 0$ et non symétriques car $E\neq G$.
5. Un vecteur normal de $(S)$ est donné par $M'_u\wedge M'_v$ :

$$\begin{pmatrix} 2u \\ 1 \\ v \end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix} 1 \\ 2v \\ u \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} u-2v^2 \\ v-2u^2 \\ 4uv-1 \end{pmatrix}$$

**Correction 19.** On définit une surface $(\Sigma)$ par les équations :

$$M(u,v)\begin{cases} X=a.cosu.cosv \\ Y=a.cosu.sinv \\ Z=b.sinu \end{cases}$$

avec $a,b$ deux constantes positives.
1. Les vecteurs $\boldsymbol{OM}'_u$ et $\boldsymbol{OM}'_v$ sont donnés comme suit :

$$M'_u\begin{cases} -asinucosv \\ -asinusinv \\ bcosu \end{cases}, \quad M'_v\begin{cases} -acosusinv \\ acosucosv \\ 0 \end{cases}$$

2. Les coefficients $E,F,G$ de la première forme fondamentale de la surface $(\Sigma)$ :

$$\begin{cases} E=||M'_u||^2=a^2sin^2ucos^2v+a^2sin^2usin^2v+b^2cos^2u=a^2sin^2u+b^2cos^2u \\ F=M'_u.M'_v=0 \\ G=||M'_v||^2=a^2cos^2usin^2v+a^2cos^2ucos^2v=a^2cos^2u \end{cases}$$

3. Par suite : $ds^2=Edu^2+Gdv^2=(a^2sin^2u+b^2cos^2u)du^2+a^2cos^2udv^2$.
4. Les coordonnées $(u,v)$ sont orthogonales car $F=0$ mais $E\neq G$ par suite non symétriques.
5. Soit $\mathcal{N}$ vecteur normal en un point de $(\Sigma)$.

$$\mathcal{N}=\begin{vmatrix} -asinucosv \\ -asinusinv \\ bcosu \end{vmatrix}\wedge\begin{vmatrix} -acosusinv \\ acosucosv \\ 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -abcos^2ucosv \\ -abcos^2usinv \\ -a^2sinucosu \end{vmatrix}\Longrightarrow||\mathcal{N}||^2=a^2cos^2u(a^2sin^2u+b^2sin^2u)$$

Par suite on obtient le vecteur unitaire normal $n$ donné par :

$$n=\frac{\mathcal{N}}{||N||}=\frac{1}{|cosu|\sqrt{a^2sin^2u+b^2sin^2u}}\begin{vmatrix}-bcos^2ucosv\\-bcos^2usinv\\-asinucosu\end{vmatrix}=\frac{1}{\epsilon\sqrt{a^2sin^2u+b^2cos^2u}}\begin{vmatrix}-bcosucosv\\-bcosusinv\\-asinu\end{vmatrix}$$
$$\epsilon=1\ si\ cosu>0\,,\epsilon=-1\ si\ cosu<0$$

6. Calculons ci-dessous les vecteurs $\boldsymbol{OM}''_{uu}$, $\boldsymbol{OM}''_{uv}$, $\boldsymbol{OM}''_{vv}$ :

$$M''_{uu}=\begin{vmatrix}-acosucosv\\-acosusinv\\-bsinu\end{vmatrix}\quad M''_{uv}=\begin{vmatrix}asinusinv\\-asinucosv\\0\end{vmatrix}\quad M''_{vv}=\begin{vmatrix}-acosucosv\\-acosusinv\\0\end{vmatrix}$$

7. On pose :

$$L=\boldsymbol{n}.\boldsymbol{OM}''_{uu},\quad M=\boldsymbol{n}.\boldsymbol{OM}''_{uv},\quad N=\boldsymbol{n}.\boldsymbol{OM}''_{vv}$$

Calculons ces derniers coefficients :

$$L=\frac{1}{\epsilon\sqrt{a^2sin^2u+b^2cos^2u}}.ab\quad M=0,\quad N=\frac{1}{\epsilon\sqrt{a^2sin^2u+b^2cos^2u}}.abcos^2u$$

**Correction 20.** On considère la surface $(\Gamma)$ définie par les équations :

$$M(u,v)\begin{cases}X=sinu.cosv\\Y=sinu.sinv\\Z=cosu+Logtg\dfrac{u}{2}+\psi(v)\end{cases}$$

avec $\psi(v)$ est une fonction définie de classe $C^1$ de $v$.

1. Le domaine de définition de la surface $(\Gamma)$ : $(u,v)\in]0,\pi[\times\mathbb{R}$, ainsi $tg(u/2)>0$.
2. Fixons $v=v_0=constante$, on obtient $X=cosv_0.sinu$, $Y=sinv_0sinu$, d'où :

$$\frac{Y}{X}=tgv_0\Longrightarrow Xtgv_0-Y=0$$

C'est l'équation d'un plan dans $\mathbb{R}^3$. Les courbes coordonnées $v=constante$ constituent une famille de courbes planes de $(\Gamma)$ appartenant au plan $Xtgv_0-Y=0$. Ce dernier est perpendiculaire au vecteur $w=(tgv_0,-1,0)^T$, le vecteur tangent à la courbe coordonnée $u$ est $\tau=(cosucosv_0,cosusinv_0,\dfrac{cos^2u}{sinu})^T$. Le produit scalaire de $w.\tau=tgv_0.cosucosv_0-cosusinv_0+0=0$, par suite, le plan coupe $(\Gamma)$ sous un angle constant égal à $\pi/2$.
3. Calculons les composantes des vecteurs $\boldsymbol{OM}'_u$ et $\boldsymbol{OM}'_v$.

$$M'_u\begin{cases}cosucosv\\cosusinv\\\dfrac{cos^2u}{sinu}\end{cases},\quad M'_v\begin{cases}-sinusinv\\sinucosv\\\psi'(v)\end{cases}$$

4. Calculons les coefficients $E,F,G$ de la première forme fondamentale de la surface $(\Gamma)$.

$$\begin{cases}E=||M'_u||^2=cos^2u+\dfrac{cos^4u}{sin^2u}=\dfrac{1}{tg^2u}.\\F=M'_u.M'_v=\dfrac{\psi'(v).cos^2u}{sinu}.\\G=||M'_v||^2=sin^2u+\psi'^2(v).\end{cases}$$

5. D'où l'expression de $ds^2$ :

$$ds^2 = \frac{1}{tg^2u}du^2 + 2\frac{\psi'(v).cos^2u}{sinu}dudv + (sin^2u + \psi'^2(v))dv^2$$

6. Les coordonnées $(u,v)$ ne sont pas orthogonales $(F \neq 0)$ et non symétriques $(E \neq G)$.
7. On suppose pour la suite que $\psi(v) = 0$. Soit $\mathcal{N}$ vecteur normal en un point de $(\Gamma)$.

$$\mathcal{N} = \begin{vmatrix} cosucosv \\ cosusinv \\ \frac{cos^2u}{sinu} \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} -sinusinv \\ sinucosv \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -cos^2ucosv \\ -cos^2usinv \\ sinucosu \end{vmatrix} \Longrightarrow ||\mathcal{N}||^2 = cos^2u \Rightarrow ||\mathcal{N}|| = cosu > 0,\ u \in ]0,\pi[$$

Par suite on obtient le vecteur unitaire normal $n$ donné par :

$$n = \frac{\mathcal{N}}{||\mathcal{N}||} = \begin{vmatrix} -cosucosv \\ -cosusinv \\ sinu \end{vmatrix}$$

8. Calculons les vecteurs $\boldsymbol{OM}''_{uu}$, $\boldsymbol{OM}''_{uv}$, $\boldsymbol{OM}''_{vv}$ :

$$M''_{uu}\begin{cases} -sinucosv \\ -sinusinv \\ \frac{cosu(cos^2u-2)}{sin^2u} \end{cases}, \quad M''_{uv}\begin{cases} -cosusinv \\ cosucosv \\ 0 \end{cases} \quad M''_{vv}\begin{cases} -sinucosv \\ -sinusinv \\ 0 \end{cases}$$

9. On pose : $L = \boldsymbol{n}.\boldsymbol{OM}''_{uu}$, $M = \boldsymbol{n}.\boldsymbol{OM}''_{uv}$, $N = \boldsymbol{n}.\boldsymbol{OM}''_{vv}$. Calculons les coefficients $L, M$ et $N$, on obtient :

$$L = \boldsymbol{n}.\boldsymbol{OM}''_{uu} = \frac{-cosu}{sinu}, \quad M = \boldsymbol{n}.\boldsymbol{OM}''_{uv} = 0, \quad N = \boldsymbol{n}.\boldsymbol{OM}''_{vv} = sinucosu$$

10. La courbure totale $K$ est donnée par :

$$K = \frac{L.N - M^2}{E.G. - F^2} = \frac{L.N}{E.G} = \frac{\frac{-cosu}{sinu}.sinucosu}{\frac{1}{tg^2u}.sin^2u} = -1$$

$H$ La courbure moyenne est donnée par : $H = Trace(g^{-1}.\Phi)$. Il s'ensuit :

$$g = \begin{pmatrix} cotg^2u & 0 \\ 0 & sin^2u \end{pmatrix} \Rightarrow g^{-1} = \begin{pmatrix} tg^2u & 0 \\ 0 & \frac{1}{sin^2u} \end{pmatrix}, \Phi = \begin{pmatrix} -cotgu & 0 \\ 0 & sinucosu \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$g^{-1}.\Phi = \begin{pmatrix} -tgu & 0 \\ 0 & \frac{1}{tgu} \end{pmatrix} \Rightarrow H = \frac{1}{tgu} - tgu$$

**Correction 21.** Soit la surface $(\Gamma)$ définie paramétriquement par :

$$M(u,v)\begin{cases} X = thu.cosv \\ Y = thu.sinv \\ Z = \frac{1}{chu} + Logth\frac{u}{2} \end{cases}$$

avec $chu$ et $thu$ sont respectivement le cosinus et la tangente hyperboliques définies par :

$$chu = \frac{e^u + e^{-u}}{2}, \quad thu = \frac{e^u + e^{-u}}{e^u - e^{-u}}$$

1. Le domaine de définition de la surface $(\Gamma)$ est $u \in ]0,+\infty[$ tel que $u > 0$.
2. Calculons les composantes des vecteurs $\boldsymbol{OM}'_u$ et $\boldsymbol{OM}'_v$. On rappelle que $\frac{dthu}{du} = 1 - th^2u = \frac{1}{ch^2u}$.

$$M'_u \begin{cases} \frac{cosv}{ch^2u} \\ \frac{sinv}{ch^2u} \\ \frac{1}{shuch^2u} \end{cases} \quad , \quad M'_v \begin{cases} -thusinv \\ thucosv \\ 0 \end{cases}$$

3. Le calcul des coefficients $E, F, G$ de la première forme fondamentale de la surface $(\Gamma)$ donne :

$$\begin{cases} E = ||M'_u||^2 = \frac{1}{ch^2ush^2u} \\ F = M'_u.M'_v = 0 \\ G = ||M'_v||^2 = th^2u \end{cases}$$

4. D'où l'expression de $ds^2$ :

$$ds^2 = \frac{1}{ch^2ush^2u}du^2 + th^2udv^2$$

5. Les coordonnées $(u, v)$ sont orthogonales car $F = 0$ mais non symétriques $E \neq G$.
6. Soit $\mathcal{N}$ un vecteur normal en un point $M$ de $(\Gamma)$. On a :

$$\mathcal{N} = \begin{vmatrix} \frac{cosv}{ch^2u} \\ \frac{sinv}{ch^2u} \\ \frac{1}{shuch^2u} \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} -thusinv \\ thucosv \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{-cosv}{ch^3u} \\ \frac{-sinv}{ch^3u} \\ \frac{shu}{ch^3u} \end{vmatrix} \Longrightarrow ||\mathcal{N}||^2 = \frac{1}{ch^4u} \Longrightarrow ||\mathcal{N}|| = \frac{1}{ch^2u}$$

D'où $n$ le vecteur unitaire normal au point $M$ :

$$n = \begin{vmatrix} \frac{-cosv}{chu} \\ \frac{-sinv}{chu} \\ \frac{shu}{chu} \end{vmatrix}$$

7. Calculons les vecteurs :

$$\boldsymbol{OM}''_{uu}, \quad \boldsymbol{OM}''_{uv}, \quad \boldsymbol{OM}''_{vv}$$

$$M'_{uu} \begin{cases} \frac{-2shucosv}{ch^3u} \\ \frac{-2shusinv}{ch^3u} \\ -\frac{3ch^2u-2}{shu^2ch^3u} \end{cases} \quad , \quad M'_{uv} \begin{cases} \frac{-sinv}{ch^2u} \\ \frac{cosv}{ch^2u} \\ 0 \end{cases} \quad , \quad M'_{vv} \begin{cases} -thucosv \\ -thusinv \\ 0 \end{cases}$$

On pose :

$$L = \boldsymbol{n}.\boldsymbol{OM}''_{uu}, \quad M = \boldsymbol{n}.\boldsymbol{OM}''_{uv}, \quad N = \boldsymbol{n}.\boldsymbol{OM}''_{vv}$$

8. Calculons les coefficients $L, M$ et $N$, on obtient :

$$L = \frac{-1}{shuchu^2}, \quad M = 0, \quad N = \frac{shu}{ch^2u}$$

9. On commence par $K$ la courbure totale :

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{L.N}{E.G} = -1$$

$H$ La courbure moyenne est donnée par : $H = Trace(g^{-1}.\Phi)$. Il s'ensuit :

$$g = \begin{pmatrix} \frac{1}{ch^2ush^2u} & 0 \\ 0 & th^2u \end{pmatrix} \Rightarrow g^{-1} = \begin{pmatrix} ch^2ush^2u & 0 \\ 0 & \frac{ch^2u}{sh^2u} \end{pmatrix}, \Phi = \begin{pmatrix} -\frac{1}{ch^2ushu} & 0 \\ 0 & \frac{shu}{ch^2u} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$g^{-1}.\Phi = \begin{pmatrix} -shu & 0 \\ 0 & \frac{1}{shu} \end{pmatrix} \Rightarrow H = \frac{1}{shu} - shu$$

**Correction 22.** 1a. La surface est paramétrée par :

$$M = \begin{vmatrix} x \\ y \\ f(x,y) \end{vmatrix}$$

On obtient les éléments suivants :

$$M'_x = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ f'_x \end{vmatrix}, \quad M'_y = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ f'_y \end{vmatrix}$$

$$E = M'_x.M'_x = ||M'_x||^2 = 1 + f'^2_x, \quad F = M'_x.M'_y = f'_x f'_y, \quad G = M'_y.M'_y = ||M'_y||^2 = 1 + f'^2_y$$

$$\mathcal{N} = M'_x \wedge M'_y = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ f'_x \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ f'_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -f'_x \\ -f'_y \\ 1 \end{vmatrix} \Rightarrow ||\mathcal{N}||^2 = 1 + f'^2_x + f'^2_y \Longrightarrow$$

$$q = ||\mathcal{N}|| = \sqrt{1 + f'^2_x + f'^2_y} \Rightarrow n = \mathcal{N}/q = \frac{1}{q} \begin{vmatrix} -f'_x \\ -f'_y \\ 1 \end{vmatrix}$$

$$M''_{xx} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ f''_{xx} \end{vmatrix}, \quad M''_{xy} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ f''_{xy} \end{vmatrix}, \quad M''_{yy} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ f''_{yy} \end{vmatrix}$$

$$L = n.M''_{xx} = \frac{f''_{xx}}{q}, \quad M = n.M''_{xy} = \frac{f''_{xy}}{q} \quad N = n.M''_{yy} = \frac{f''_{yy}}{q}$$

1b. On commence par $K$ la courbure totale :

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{\frac{f''_{xx}}{q}.\frac{f''_{yy}}{q} - \left(\frac{f''_{xy}}{q}\right)^2}{(1 + f'^2_x)(1 + f'^2_y) - (f'_x f'_y)^2} = \frac{f''_{xx}f''_{yy} - (f''_{xy})^2}{q^2(1 + f'^2_x + f'^2_y)} = \frac{f''_{xx}f''_{yy} - (f''_{xy})^2}{(1 + f'^2_x + f'^2_y)^2}$$

$H$ La courbure moyenne est donnée par : $H = Trace(g^{-1}.\Phi)$. Il s'ensuit :

$$g = \begin{pmatrix} 1 + f'^2_x & f'_x f'_y \\ f'_x f'_y & 1 + f'^2_y \end{pmatrix} \Rightarrow g^{-1} = \frac{1}{1 + f'^2_x + f'^2_y} \begin{pmatrix} 1 + f'^2_y & -f'_x f'_y \\ -f'_x f'_y & 1 + f'^2_x \end{pmatrix}, \Phi = \frac{1}{q} \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

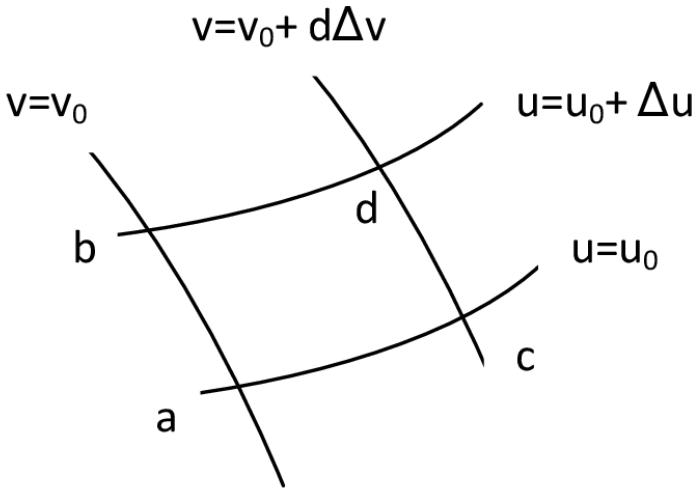



FIGURE 20 – Le quadrilatère infinitésimal des courbes coordonnées

$$g^{-1}.\Phi = \frac{1}{q(1+f_x'^2+f_y'^2)}\begin{pmatrix} f''_{xx}(1+f_y'^2)-f'_xf'_yf''_{xy} & ---- \\ ---- & (1+f_x'^2)f''_{yy}-f'_xf'_yf''_{xy}\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$H = Trace(g^{-1}.\Phi) = \frac{(1+f_x'^2)f''_{yy}-2f'_xf'_yf''_{xy}+(1+f_y'^2)f''_{xx}}{(1+f_x'^2+f_y'^2)^{3/2}}$$

**Correction 23.** Soit $(\Sigma)$ une surface de $\mathbb{R}^3$ paramétrée par $OM(u,v)$ telle que sa première forme fondamentale s'écrit : $ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$

1. Les conditions i),ii) et iii) sont équivalentes :

i) - On suppose que $\frac{\partial E}{\partial v} = \frac{\partial G}{\partial u} = 0$. On rappelle : soit $A$ un vecteur et $\alpha = A.A$, alors $d\alpha = dA.A + A.dA = 2A.dA$. Comme $E = OM'_u.OM'_u$, on obtient $dE = 2OM'_u.dOM'_u = 2OM'_u.(OM''_{uu}du + OM''_{uv}dv) = 2OM'_u.OM''_{uu}du + 2OM'_u.OM''_{uv}dv$ soit $\frac{\partial E}{\partial v} = 2OM'_u.OM''_{uv} = 0 \Rightarrow OM'_u \perp OM''_{uv}$ ou $\frac{\partial OM}{\partial u} \perp \frac{\partial^2 OM}{\partial u \partial v}$.

Utilisant la même méthode pour $G$, on otient que $\frac{\partial G}{\partial u} = 0$ implique que $\frac{\partial OM}{\partial v} \perp \frac{\partial^2 OM}{\partial u \partial v}$. Les vecteurs $OM'_u, OM'_v$ sont une base du plan tangent en $M$, par suite le vecteur $\frac{\partial^2 OM}{\partial u \partial v}$ est normal au plan tangent donc parallèle à tout vecteur normal, et en particulier le vecteur $M'_u \wedge M'_v$. C'est la condition ii).

ii) - Le vecteur $\frac{\partial^2 OM}{\partial u \partial v}$ est parallèle au vecteur normal $N$ à la surface. D'après la condition i), $E$ dépend de $u$ et $G$ dépend de $v$. Soit l'arc $ab$ sur la figure (20). Sa longueur est donnée par :

$$L_{ab} = \int_{u_0}^{u_0+\Delta u} \sqrt{E(t)}dt = \int_{u_0}^{u_0+\Delta u} ds = s(b) - s(a) = ba$$

Pour l'arc $cd$, la longueur de l'arc $cd$ est exprimée par la même formule vue que $E$ est fonction de $u$ seulement. On a donc $dc = ba$. C'est la condition iii).

iii) - On suppose que les côtés opposés de tout quadrilatère curviligne formés par les courbes coordonnées $(u,v)$ ont même longueurs. La première forme fondamentale donne :

$$ds^2 = E.du^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

Dans notre quadrilatère $acdb$, la longueur de l'arc $ab$ dépend que de $u$, de même l'arc $cd$, par suite le calcul des longueurs des arcs $ab$ et $cd$ dépendent que de la variable $u$ et on a : $dv = 0 \Longrightarrow ds^2 = E.du^2 \Longrightarrow ds = \sqrt{E(u)}du$ et $\dfrac{\partial E}{\partial v} = 0$. De la même manière, on obtient $\dfrac{\partial G}{\partial u} = 0$. C'est la condition i).
2. Quand ces conditions sont satisfaites, on dit que les courbes coordonnées de $(\Sigma)$ forment un réseau de *Tchebychev*.[8]

Posons :

$$d\tilde{u} = \sqrt{E}du, \quad d\tilde{v} = \sqrt{G}dv \Longrightarrow \frac{\partial M}{\partial u} = \frac{\partial M}{\partial \tilde{u}}\frac{d\tilde{u}}{du} = \sqrt{E}\frac{\partial M}{\partial \tilde{u}} \Longrightarrow \frac{\partial M}{\partial v} = \sqrt{G}\frac{\partial M}{\partial \tilde{v}} \Longrightarrow$$
$$F = OM'_u.OM'_v = \sqrt{EG}OM'_{\tilde{u}}.OM'_{\tilde{v}} = \sqrt{E.G}\tilde{F} \Longrightarrow Fdudv = \tilde{F}d\tilde{u}d\tilde{v}$$

Par suite $ds^2$ s'écrit :

$$ds^2 = d\tilde{u}^2 + 2\tilde{F}d\tilde{u}d\tilde{v} + d\tilde{v}^2$$

De l'unicité de l'écriture de la première forme fondamentale, on a $\tilde{E} = \tilde{G} = 1$, il s'insuit $\tilde{F} = OM'_{\tilde{u}}.OM'_{\tilde{v}} = ||OM'_{\tilde{u}}||.||OM'_{\tilde{v}}||cos\theta = 1 \times 1.cos\theta$ ce qui donne :

$$ds^2 = d\tilde{u}^2 + 2cos\theta d\tilde{u}d\tilde{v} + d\tilde{v}^2$$

où $\theta$ est l'angle entre les vecteurs $OM'_{\tilde{u}}$ et $OM'_{\tilde{v}}$. Or $OM'_{\tilde{u}}$ et $OM'_{\tilde{v}}$ sont respectivement fonction de $\tilde{u}$ et $\tilde{v}$. On obtient ainsi que $\theta$ est fonction de $(\tilde{u}, \tilde{v})$. $\theta$ est aussi l'angle entre les courbes coordonnées $\tilde{u}, \tilde{v}$ car le vecteur $OM'_{\tilde{u}}$ (respectivement $OM'_{\tilde{v}}$) est tangent à la courbe coordonnée $\tilde{u}$ (respectivement $\tilde{v}$) au point M.

3. On calcule les 2 déterminants $A$ et $B$ sachant que $\tilde{E} = \tilde{G} = 1$ et $\tilde{F} = cos\theta$ :

$$A = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2}E_{vv} + F_{uv} - \frac{1}{2}G_{uu} & \frac{1}{2}E_u & F_u - \frac{1}{2}E_v \\ F_v - \frac{1}{2}G_u & E & F \\ \frac{1}{2}G_v & F & G \end{vmatrix}$$

$$B = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2}E_v & \frac{1}{2}G_u \\ -\frac{1}{2}E_v & E & F \\ \frac{1}{2}G_u & F & G \end{vmatrix}$$

D'où :

$$B = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & cos\theta \\ 0 & cos\theta & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$A = \begin{vmatrix} +\tilde{F}_{uv} & 0 & \tilde{F}_u \\ \tilde{F}_v & 1 & \tilde{F} \\ 0 & \tilde{F} & 1 \end{vmatrix} = (1 - \tilde{F}^2)\tilde{F}_{uv} + \tilde{F}.\tilde{F}_u.\tilde{F}_v$$

De $F = cos\theta \Rightarrow F_u = \dfrac{\partial F}{\partial u} = -sin\theta\dfrac{\partial \theta}{\partial u} \Rightarrow F_{uv} = \dfrac{\partial F_u}{\partial v} = -cos\theta\dfrac{\partial \theta}{\partial v}\dfrac{\partial \theta}{\partial u} - sin\theta\dfrac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v}$.
$F_v = \dfrac{\partial F}{\partial v} = -sin\theta\dfrac{\partial \theta}{\partial v}$. Par suite :

$$A = (1 - \tilde{F}^2)\tilde{F}_{uv} + \tilde{F}.\tilde{F}_u.\tilde{F}_v = -sin^2\theta cos\theta\frac{\partial \theta}{\partial u}\frac{\partial \theta}{\partial v} - sin^3\theta\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} + cos\theta sin^2\theta\frac{\partial \theta}{\partial u}\frac{\partial \theta}{\partial v} = -sin^3\theta\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v}$$
$$\Longrightarrow K = \frac{A}{(EG - F^2)^2} = -sin^3\theta\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v}.\frac{1}{sin^4\theta} = -\frac{1}{sin\theta}.\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v}, \text{ C'est l'équation de sinus-Gordon.}$$

8. Pafnouti Tchebychev (1821 - 1894 ) : Mathématicien russe.

4. On pose :

$$\begin{cases} \hat{u} = \tilde{u} + \tilde{v} \\ \hat{v} = \tilde{u} - \tilde{v} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \tilde{u} = \dfrac{1}{2}(\hat{u}+\hat{v}) \Rightarrow d\tilde{u} = \dfrac{1}{2}(d\hat{u}+d\hat{v}) \\ \tilde{v} = \dfrac{1}{2}(\hat{u}-\hat{v}) \Rightarrow d\tilde{v} = \dfrac{1}{2}(d\hat{u}-d\hat{v}) \end{cases}$$

L'expression de $d\tilde{s}^2$ devient :

$$d\hat{s}^2 = \frac{1}{4}(d\hat{u}+d\hat{v})^2 + 2.\frac{1}{4}cos\theta(d\hat{u}+d\hat{v})(d\hat{u}-d\hat{v}) + \frac{1}{4}(d\hat{u}-d\hat{v})^2 \Longrightarrow$$
$$d\hat{s}^2 = \frac{1}{2}(1+cos^2\theta)d\hat{u}^2 + \frac{1}{2}(1-cos^2\theta)d\hat{v}^2 = cos^2(\theta/2)d\hat{u}^2 + sin^2(\theta/2)d\hat{v}^2 \Longrightarrow$$
$$d\hat{s}^2 = cos^2\omega d\hat{u}^2 + sin^2\omega d\hat{v}^2, \ \ \omega = \theta/2$$

**Correction 24.** 1. Soit $(\mathcal{F})$ une surface définie dans $\mathbb{R}^3$, paramétrée par la fonction vectorielle $\boldsymbol{OM} = S(u,v)$ telle que :

$$S(u,v) \left| \begin{array}{l} x = f(u,v) \\ y = g(u,v) \\ z = h(u,v) \end{array} \right.$$

On obtient :

$$\frac{\partial S}{\partial u} = \left| \begin{array}{l} f'_u \\ g'_u \\ h'_u \end{array} \right. , \frac{\partial S}{\partial v} = \left| \begin{array}{l} f'_v \\ g'_v \\ h'_v \end{array} \right. \Longrightarrow E = \frac{\partial S}{\partial u}.\frac{\partial S}{\partial u} = f'^2_u + g'^2_u + h'^2_u, \Longrightarrow$$
$$F = \tfrac{\partial S}{\partial u}.\tfrac{\partial S}{\partial v} = f'_u f'_v + g'_u g'_v + h'_u h'_v, \quad G = \frac{\partial S}{\partial v}.\frac{\partial S}{\partial v} = f'^2_v + g'^2_v + h'^2_v$$

La première forme fondamentale de $(\mathcal{F})$ s'écrit :

$$ds^2 = \left\| \frac{\partial S}{\partial u} \right\|^2 du^2 + 2\frac{\partial S}{\partial u}.\frac{\partial S}{\partial v}dudv + \left\| \frac{\partial S}{\partial v} \right\|^2 dv^2 = E.du^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

Soit $n$ le vecteur normal unitaire :

$$n = \frac{\dfrac{\partial S}{\partial u} \wedge \dfrac{\partial S}{\partial v}}{\left\| \dfrac{\partial S}{\partial u} \wedge \dfrac{\partial S}{\partial v} \right\|} = \frac{1}{\left\| \dfrac{\partial S}{\partial u} \wedge \dfrac{\partial S}{\partial v} \right\|} \left( \left| \begin{array}{l} f'_u \\ g'_u \\ h'_u \end{array} \right. \wedge \left| \begin{array}{l} f'_v \\ g'_v \\ h'_v \end{array} \right. \right) = \frac{1}{\left\| \dfrac{\partial S}{\partial u} \wedge \dfrac{\partial S}{\partial v} \right\|} \left| \begin{array}{l} g'_u h'_v - h'_u g'_v \\ h'_u f'_v - f'_u h'_v \\ f'_u g'_v - g'_u f'_v \end{array} \right.$$

Quand le point $M$ varie sur la surface $(\mathcal{F})$, le repère $(\dfrac{\partial S}{\partial u}, \dfrac{\partial S}{\partial v}, n)$ est un repère mobile. La deuxième forme fondamentale de $(\mathcal{F})$ est définie par :

$$n.d^2S = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$$

où les coefficients $L, M, N$ sont donnés par :

$$L = n.\frac{\partial^2 S}{\partial u^2}, \quad L = n.\frac{\partial^2 S}{\partial u \partial v}, \quad N = n.\frac{\partial^2 S}{\partial v^2}$$

2. On considère que $(\mathcal{F})$ est la sphère définie par :$S = \left| \begin{array}{l} x = Rcos\varphi cos\lambda \\ y = Rcos\varphi sin\lambda \quad R > 0 \\ z = Rsin\varphi \end{array} \right.$

Soit $\mathcal{L}_M$ la variable de Mercator. La variable Mercator est définie par $\mathcal{L}_M = Logtg\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\varphi}{2}\right)$ avec $d\mathcal{L}_M = \dfrac{d\varphi}{cos\varphi}$. On a alors :

$$\frac{\partial S}{\partial \varphi} = \left| \begin{array}{l} -Rsin\varphi cos\lambda \\ -Rsin\varphi sin\lambda \\ Rcos\varphi \end{array} \right. , \quad \frac{\partial S}{\partial \lambda} = \left| \begin{array}{l} -Rcos\varphi sin\lambda \\ Rcos\varphi cos\lambda \\ 0 \end{array} \right. , \quad \frac{\partial S}{\partial \mathcal{L}_M} = \frac{\partial S}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial \mathcal{L}_M} = cos\varphi \left| \begin{array}{l} -Rsin\varphi cos\lambda \\ -Rsin\varphi sin\lambda \\ Rcos\varphi \end{array} \right.$$

Par suite, on obtient :

$$\frac{\partial S}{\partial \mathcal{L}_M}.\frac{\partial S}{\partial \mathcal{L}_M} = R^2cos^2\varphi, \quad \frac{\partial S}{\partial \lambda}.\frac{\partial S}{\partial \lambda} = R^2cos^2\varphi \Longrightarrow$$
$$\frac{\partial S}{\partial \mathcal{L}_M}.\frac{\partial S}{\partial \mathcal{L}_M} = \frac{\partial S}{\partial \lambda}.\frac{\partial S}{\partial \lambda} = R^2cos^2\varphi = e^{\Phi(\mathcal{L}_M,\lambda)} \; avec \; \Phi(\mathcal{L}_M,\lambda) = Log(R^2cos^2\varphi), \quad \frac{\partial S}{\partial \mathcal{L}_M}.\frac{\partial S}{\partial \lambda} = 0$$

Il s'ensuit que $S(\mathcal{L}_M,\lambda)$ est une paramétrisation conforme de $(\mathcal{F})$.

La première forme fondamentale de la sphère paramétrée par $(\varphi,\lambda)$ est donnée par :

$$ds^2 = R^2d\varphi^2 + R^2cos^2\varphi d\lambda^2$$

Maintenant, on considère les paramètres $(\mathcal{L}_M,\lambda)$, on obtient alors $ds^2$ comme suit :

$$ds^2 = R^2cos^2\varphi\left(\frac{d\varphi^2}{cos^2\varphi} + d\lambda^2\right) \Longrightarrow ds^2 = R^2cos^2\varphi(d\mathcal{L}_M^2 + d\lambda^2) \Longrightarrow$$
$$ds^2 = e^{Log(R^2cos^2\varphi)}(d\mathcal{L}_M^2 + d\lambda^2) = e^{\Phi(\mathcal{L}_M,\lambda)}(d\mathcal{L}_M^2 + d\lambda^2), \; \Phi(\mathcal{L}_M,\lambda) = Log(R^2cos^2\varphi)$$

Calculons le vecteur normal $\mathcal{N}$ :

$$\mathcal{N} = \frac{\partial S}{\partial \mathcal{L}_M} \wedge \frac{\partial S}{\partial \lambda} = \begin{vmatrix} -Rsin\varphi cos\varphi cos\lambda \\ -Rsin\varphi cos\varphi sin\lambda \\ Rcos^2\varphi \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} -Rcos\varphi sin\lambda \\ Rcos\varphi cos\lambda \\ 0 \end{vmatrix} = R^2cos^2\varphi \begin{vmatrix} -cos\varphi cos\lambda \\ -cos\varphi sin\lambda \\ -sin\varphi \end{vmatrix}$$
$$\Longrightarrow \text{ le vecteur unitaire normal est } \; n = -\begin{vmatrix} cos\varphi cos\lambda \\ cos\varphi sin\lambda \\ sin\varphi \end{vmatrix}$$

Calculons les vecteurs : $\frac{\partial^2 S}{\partial \mathcal{L}_M^2}, \quad \frac{\partial^2 S}{\partial \mathcal{L}_M \partial \lambda}, \quad \frac{\partial^2 S}{\partial \lambda^2}$. D'où :

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \mathcal{L}_M^2} = \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial S}{\partial \mathcal{L}_M}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial \mathcal{L}_M} = cos\varphi\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial S}{\partial \mathcal{L}_M}\right) = -Rcos\varphi \begin{vmatrix} cos2\varphi cos\lambda \\ cos2\varphi sin\lambda \\ sin2\varphi \end{vmatrix}$$
$$\frac{\partial^2 S}{\partial \mathcal{L}_M \partial \lambda} = Rcos\varphi \begin{vmatrix} sin\varphi sin\lambda \\ -sin\varphi cos\lambda \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \frac{\partial^2 S}{\partial \lambda^2} = -Rcos\varphi \begin{vmatrix} cos\lambda \\ sin\lambda \\ 0 \end{vmatrix}$$

Le calcul des coefficients $L, M$ et $N$ donnent les résultats suivants :

$$L = Rcos^2\varphi, \quad M = 0, \quad N = Rcos^2\varphi$$

par suite :

$$n.d^2S = Ld\mathcal{L}_M^2 + 2Md\mathcal{L}_m d\lambda + Nd\lambda^2 = Rcos^2\varphi(d\mathcal{L}_M^2 + d\lambda^2) \Longrightarrow$$
$$-n.d^2S = -(Ld\mathcal{L}_M^2 + 2Md\mathcal{L}_m d\lambda + Nd\lambda^2) = -Rcos^2\varphi(d\mathcal{L}_M^2 + d\lambda^2) \Longrightarrow$$
$$-nd^2S = e^{Log(R^2cos\varphi)}\left(\frac{d\mathcal{L}_M^2}{\rho_1} + \frac{d\lambda^2}{\rho_2}\right) = e^{\Phi(\mathcal{L}_M,\lambda)}.\left(\frac{d\mathcal{L}_M^2}{\rho_1} + \frac{d\lambda^2}{\rho_2}\right), \; \rho_1 = \rho_2 = -R$$

Ainsi la sphère $(\mathcal{F})$ paramétrée par $(\mathcal{L}_M,\lambda)$ est une surface isotherme.

3. On va vérifier les équations de Gauss-Weingarten :

3.1

$$\frac{\partial S'_{\mathcal{L}_M}}{\partial \mathcal{L}_M} \overset{?}{=} \frac{\Phi'_{\mathcal{L}_M}}{2}.S'_{\mathcal{L}_M} - \frac{\Phi'_{\lambda}}{2}.S'_{\lambda} - \frac{e^{\Phi}}{\rho_1}.n \Longrightarrow$$

$$-Rcos\varphi \begin{vmatrix} cos2\varphi cos\lambda \\ cos2\varphi sin\lambda \\ sin2\varphi \end{vmatrix} \overset{?}{=} -sin\varphi \begin{vmatrix} -Rcos\varphi sin\varphi sin\lambda \\ -Rcos\varphi sin\varphi cos\lambda \\ Rcos^2\varphi \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} - \frac{R^2cos^2\varphi}{-R}(-1) \begin{vmatrix} cos\varphi cos\lambda \\ cos\varphi sin\lambda \\ sin\varphi \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -Rcos\varphi cos2\varphi cos\lambda \\ -Rcos\varphi cos2\varphi sin\lambda \\ -2Rsin\varphi cos^2\varphi \end{vmatrix} \overset{?}{=} \begin{vmatrix} Rcos\varphi sin^2\varphi cos\lambda \\ Rcos\varphi sin^2\varphi sin\lambda \\ -Rsin\varphi cos^2\varphi \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -Rcos^2\varphi cos\varphi cos\lambda \\ -Rcos^2\varphi cos\varphi sin\lambda \\ -Rcos^2\varphi sin\varphi \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -Rcos\varphi cos2\varphi cos\lambda \\ -Rcos\varphi cos2\varphi sin\lambda \\ -2Rsin\varphi cos^2\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Rcos\varphi(sin^2\varphi - cos^2\varphi)\varphi cos\lambda \\ Rcos\varphi(sin^2\varphi - cos^2\varphi)sin\lambda \\ -2Rsin\varphi cos^2\varphi \end{vmatrix}$$

3.2

$$\frac{\partial S'_{\lambda}}{\partial \mathcal{L}_M} \overset{?}{=} \frac{\Phi'_{\lambda}}{2}.S'_{\mathcal{L}_M} + \frac{\Phi'_{\mathcal{L}_M}}{2}.S'_{\lambda} \Longrightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathcal{L}_M}\left( \begin{vmatrix} -Rcos\varphi sin\lambda \\ +Rcos\varphi cos\lambda \\ 0 \end{vmatrix} \right) \overset{?}{=} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} - sin\varphi \begin{vmatrix} -Rcos\varphi sin\lambda \\ Rcos\varphi cos\lambda \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} Rcos\varphi sin\varphi sin\lambda \\ -Rcos\varphi sin\varphi cos\lambda \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Rcos\varphi sin\varphi sin\lambda \\ -Rcos\varphi sin\varphi cos\lambda \\ 0 \end{vmatrix}$$

3.3

$$\frac{\partial n}{\partial \mathcal{L}_M} \overset{?}{=} \frac{1}{\rho_1}.S'_{\mathcal{L}_M} \Longrightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathcal{L}_M}\left( \begin{vmatrix} -cos\varphi cos\lambda \\ -cos\varphi sin\lambda \\ -sin\varphi \end{vmatrix} \right) \overset{?}{=} \frac{1}{(-R)} \begin{vmatrix} -Rcos\varphi sin\varphi cos\lambda \\ -Rcos\varphi sin\varphi sin\lambda \\ Rcos^2\varphi \end{vmatrix}$$

$$cos\varphi \begin{vmatrix} sin\varphi cos\lambda \\ sin\varphi sin\lambda \\ -cos\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} cos\varphi sin\varphi cos\lambda \\ cos\varphi sin\varphi sin\lambda \\ -cos^2\varphi \end{vmatrix}$$

Ainsi, on a vérifié le premier groupe des équations de Gauss-Weingarten. On laisse au lecteur la vérification du deuxième groupe des équations de Gauss-Weingarten.

# 18 Ellipse et Ellipsoïde

## 18.1 L'Ellipse et l'ellipsoïde de révolution

**Correction 25.** 1. A partir de la figure 21, l'ellipse est obtenue par une affinité de rapport $OB/OA$ et de direction $OY'$. Les distances $OA = a$ et $OB = b$ sont respectivement le demi-grand axe et le demi-petit axe de l'ellipse. L'angle $m'Om_1$ est l'angle $\psi$. Les coordonnées de $m'$ sur le cercle de rayon $a$ sont :

$$x'_C = acos\psi,\ y'_C = asin\psi$$

Les coordonnées de $m$ sur l'ellipse sont :

$$x_E = acos\psi, \quad y_E = \frac{b}{a}.asin\psi = bsin\psi$$

De la figure 21, on obtient facilement les composantes de la normale extérieure au point $m$ de l'ellipse qu'on note $n$ :

$$n = \begin{cases} cos\varphi \\ sin\varphi \end{cases}$$

La pente de la normale à la tangente à l'ellipse au point $m$ est donnée par :

$$p = \frac{-1}{f'(x)}, \quad y = f(x), \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

On différentie la dernière équation ci-dessus, on trouve :

$$2x\frac{dx}{a^2} + 2y\frac{dy}{b^2} = 0 \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = f'(x) = -\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y} = -\frac{bcos\psi}{asin\psi}$$

D'où la pente $p$ :

$$p = \frac{-1}{f'(x)} = \frac{asin\psi}{bcos\psi} = \frac{a}{b}tg\psi \Longrightarrow \boxed{tg\varphi = \frac{a}{b}tg\psi}$$

De la formule ci-dessus et de $cos^2\varphi = \dfrac{1}{1+tg^2\varphi}$, on obtient facilement $cos\varphi$ :

$$cos\varphi = \frac{bcos\psi}{\sqrt{a^2sin^2\psi + b^2cos^2\psi}}$$

De $sin\varphi = tg\varphi.cos\varphi = \dfrac{a}{b}tg\psi cos\varphi$, on obtient $sin\varphi$ :

$$sin\varphi = \frac{asin\psi}{\sqrt{a^2sin^2\psi + b^2cos^2\psi}}$$

Reciproquement, de $cos^2\psi = \dfrac{1}{1+tg^2\psi}$, et $tg\psi = \dfrac{b}{a}tg\varphi$ on obtient facilement $cos\psi$ :

$$cos\psi = \frac{acos\varphi}{\sqrt{b^2sin^2\varphi + a^2cos^2\varphi}}$$

On déduit aussi $sin\psi$ :

$$sin\psi = \frac{bsin\varphi}{\sqrt{b^2sin^2\varphi + a^2cos^2\varphi}}$$

2. Les coordonnées paramétriques de l'ellipse en fonction de $\psi$ sont :

$$m = \begin{cases} x_E = acos\psi \\ y_E = bsin\psi \end{cases}$$

On remplace $cos\psi, sin\psi$ en fonction de $\varphi$, nous obtenons :

$$m = \begin{cases} x_E = acos\psi = a.\dfrac{acos\varphi}{\sqrt{b^2sin^2\varphi + a^2cos^2\varphi}} \\ \\ y_E = bsin\psi = b.\dfrac{bsin\varphi}{\sqrt{b^2sin^2\varphi + a^2cos^2\varphi}} \end{cases}$$

Pour simplifier les formules, on fait intervenir $e^2$ le carré de la première excentricité de l'ellipse donnée par $e^2 = \dfrac{a^2-b^2}{a^2} = 1-\dfrac{b^2}{a^2}$, et on exprime $b$ en fonction de $a$ et $e$ par $b = a\sqrt{1-e^2}$. Alors le terme $b^2sin^2\varphi + a^2cos^2\varphi$ devient :

$$a^2(1-e^2)sin^2\varphi + a^2cos^2\varphi = a^2(sin^2\varphi - e^2sin^2\varphi + cos^2\varphi) = a^2(1-e^2sin^2\varphi)$$

Les coordonnées paramétriques $(x_E, y_E)$ deviennent :

$$m = \begin{cases} x_E = acos\psi = \dfrac{a}{\sqrt{1-e^2sin^2\varphi}}cos\varphi \\ \\ y_E = bsin\psi = \dfrac{a(1-e^2)}{\sqrt{1-e^2sin^2\varphi}}sin\varphi \end{cases}$$

On retrouve $N(\varphi) = \dfrac{a}{\sqrt{1-e^2sin^2\varphi}}$ la grande normale ou le deuxième rayon de courbure de l'ellipsoïde. L'écriture définitive des coordonnées paramétriques $(x_E, y_E)$ est :

$$m = \begin{cases} x_E = N(\varphi).cos\varphi \\ \\ y_E = N(\varphi).(1-e^2).sin\varphi \end{cases}$$

Dans la figure ci-dessus (22), l'ellipse se trouve dans le repère plan $(O,ROZ)$, les coordonnées paramétriques du point de l'ellipse sont :

$$M = \begin{cases} R = N(\varphi).cos\varphi \\ \\ Z = N(\varphi).(1-e^2).sin\varphi \end{cases}$$

L'ellipsoïde de révolution est obtenu par rotation autour de l'axe $OZ$ de l'ellipse. On obtient donc les coordonnées paramétriques considérant $M$ sur l'ellipsoïde en intervenant l'angle latitude $\lambda = X\hat{O}R$ comme suit :

$$M = \begin{cases} X = N(\varphi).cos\varphi cos\lambda \\ Y = N(\varphi).cos\varphi sin\lambda \\ Z = N(\varphi).(1-e^2).sin\varphi \end{cases}$$

3. De l'équation $tg\varphi = \dfrac{a}{b}tg\psi$ obtenue à la question 1., on obtient :

$$\frac{d\varphi}{cos^2\varphi} = \frac{a}{b}\frac{d\psi}{cos^2\psi} \Longrightarrow \frac{d\varphi}{d\psi} = \frac{a}{b}\frac{cos^2\varphi}{cos^2\psi}$$

Remplaçons l'angle $\psi$ par $\varphi$, on obtient :

$$\frac{d\varphi}{d\psi} = \frac{a}{b}\frac{cos^2\varphi}{cos^2\psi} = \frac{a}{b}\frac{cos^2\varphi(b^2sin^2\varphi + a^2cos^2\varphi)}{a^2cos^2\varphi} = \frac{1}{ab}.(b^2sin^2\varphi + a^2cos^2\varphi)$$

Or dans la question précédente, on a trouvé que $b^2sin^2\varphi + a^2cos^2\varphi = a^2(1-e^2sin^2\varphi)$. D'où :

$$\frac{d\varphi}{d\psi} = \frac{a}{b}(1-e^2sin^2\varphi) = \frac{1}{\sqrt{1-e^2}}(1-e^2sin^2\varphi)$$

Je laisse au lecteur de trouver que $\dfrac{d\varphi}{d\psi} = \dfrac{\sqrt{1-e^2}}{1-e^2cos^2\psi}$.

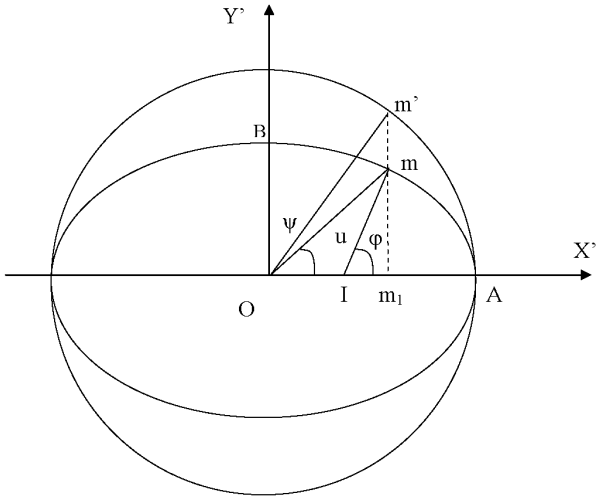



FIGURE 21 – Les angles $\psi$ et $\varphi$

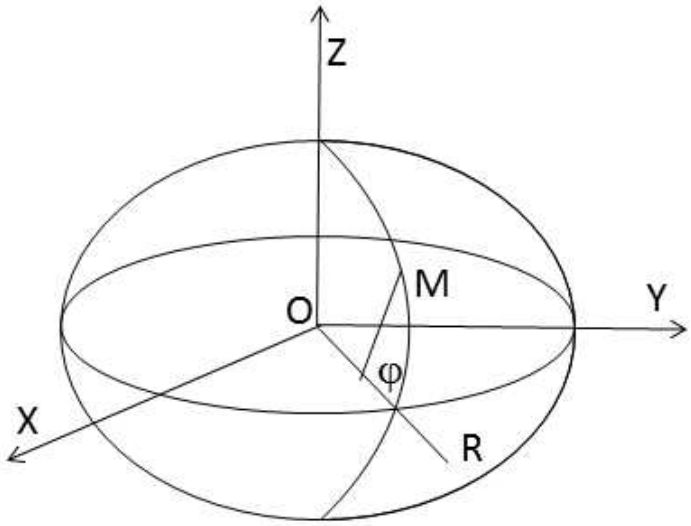



FIGURE 22 – L'Ellipsoïde de révolution

4. Pour calculer la différentielle $d\beta$ de l'arc d'ellipse en fonction de $\varphi$, on va utiliser au début les coordonnées en fonction de $\psi$, d'où :

$$d\beta^2 = dx_E^2 + dy_E^2 = (-asin\psi d\psi)^2 + (bcos\psi d\psi)^2 = (a^2sin^2\psi + b^2cos^2\psi)d\psi^2$$

On remplace $sin\psi$, $cos\psi$ en fonction de $\varphi$., on arrive à :

$$\left(\frac{d\beta}{d\psi}\right)^2 = \frac{a^2b^2sin^2\varphi + a^2b^2cos^2\varphi}{b^2sin^2\varphi + a^2cos^2\varphi} = \frac{a^2b^2}{a^2(1-e^2sin^2\varphi)} = \frac{b^2}{1-e^2sin^2\varphi} \Rightarrow d\beta = \frac{bd\psi}{\sqrt{1-e^2sin^2\varphi}}$$

Mais de la question précédente, on a $d\psi = \dfrac{\sqrt{1-e^2}d\varphi}{1-e^2sin^2\varphi}$. On obtient $d\beta$ sachant que $b = a\sqrt{1-e^2}$ :

$$d\beta = \frac{bd\psi}{\sqrt{1-e^2sin^2\varphi}} = \frac{b\sqrt{1-e^2}d\varphi}{(1-e^2sin^2\varphi)\sqrt{1-e^2sin^2\varphi)}} = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2sin^2\varphi)^{3/2}}.d\varphi = \rho.d\varphi$$

On retrouve $\rho = \dfrac{a(1-e^2)}{(1-e^2sin^2\varphi)^{3/2}}$ le rayon de courbure de la méridienne de l'ellipse. Pour l'ellipsoïde, les courbes coordonnées $\varphi = cte$ et $\lambda = cte$ sont orthogonales, par suite la première forme fondamentale s'écrit sous la forme :

$$ds^2 = d\beta^2 + d\beta_1^2 = \rho^2d\varphi^2 + A(\varphi,\lambda).d\lambda^2$$

On calcule $d\beta_1$ en différentiant $X, Y$ par rapport $\lambda$ seulement. On trouve facilement $d\beta_1^2 = dX^2 + dY^2 = (Ncos\varphi)^2.d\lambda^2 \Longrightarrow A = A(\varphi) = N^2(\varphi)cos^2\varphi$ d'où :

$$ds^2 = \rho^2d\varphi^2 + N^2(\varphi)cos^2\varphi d\lambda^2 \Longrightarrow E = \rho^2,\ F = 0,\ G = N^2cos^2\varphi$$

5. Pour l'ellipsoïde de révolution, nous avons trouvé un rayon de courbure principal à savoir le rayon de courbure de la méridienne de l'ellipse à parir de la formule $d\beta = \rho.d\varphi \Longrightarrow \rho = \dfrac{a(1-e^2)}{(1-e^2sin^2\varphi)^{3/2}}$. Pour le deuxième rayon de courbure principal qu'on note $R_2$ relatif à l'ellipsoïde, on va le calculer à partir de la valeur $K$ appelée courbure totale ou courbure de Gauss et qui vaut $K = \dfrac{1}{\rho.R_2}$. Dans le cours de géodésie, $K$ vaut :

$$K = \frac{\text{Dét}(\Phi_2)}{\text{Dét}(\Phi_1)} = \frac{L.N - M^2}{E.G - F^2}$$

avec $\Phi_1, \Phi_2$ sont respectivement la première et la seconde formes fondamentales de l'ellipsoïde de révolution. De la question précédente, on a $\text{Dét}(\Phi_1) = E.G - F^2 = \rho^2.N^2.cos^2\varphi$. Pour le calcul de $\text{Dét}(\Phi_2)$, on renvoie le lecteur au problème ci-après où on traitera en détail la deuxième forme fondamentale et on calculera $K$ et $R_2$.

6. La première forme fondamentale donne :

$$ds^2 = \rho^2d\varphi^2 + N^2cos^2\varphi d\lambda^2 = N^2cos^2\varphi\left(\frac{\rho^2}{N^2cos^2\varphi}.d\varphi^2 + d\lambda^2\right)$$

Posons $d\mathcal{L} = d\mathcal{L}(\varphi) = \dfrac{\rho}{Ncos\varphi}.d\varphi$, alors $ds^2$ devient :

$$ds^2 = N^2cos^2\varphi(d\mathcal{L}^2 + d\lambda^2)$$

La variable $\mathcal{L}$ s'appelle la latitude isométrique, elle constitue avec la latitude géodésique $\lambda$ un couple de coordonnées symétriques c'est-à-dire le coefficient $E = G$. Calculons $\mathcal{L}$ :

$$d\mathcal{L} = d\mathcal{L}(\varphi) = \frac{\rho}{Ncos\varphi}.d\varphi \Longrightarrow \mathcal{L} = \int_0^\varphi \frac{\rho(u)}{N(u)cosu}.du = \int_0^\varphi \frac{(1-e^2)du}{(1-e^2sin^2u)cosu} \Rightarrow \mathcal{L}(0) = 0$$

L'angle $\varphi \in [0,\pi/2[ \Longrightarrow \varphi/2 \in [0,\pi/4[ \Longrightarrow 0 < tg(\varphi/2) < 1$. On peut écrire la deuxième intégrale ci-dessus sous la forme :

$$\mathcal{L} = \int_0^{\varphi} \frac{(1-e^2sin^2\varphi - e^2cos^2\varphi)du}{(1-e^2sin^2u)cosu} = \int_0^{\varphi} \frac{du}{cosu} - e\int_0^{\varphi} \frac{ecosudu}{1-e^2sin^2u} = I - eJ$$

avec $I = \int_0^{\varphi} \frac{du}{cosu}$ et $J = \int_0^{\varphi} \frac{ecosudu}{1-e^2sin^2u}$.

Calcul de $I$ : faisons le changement de variables suivant $t = tg(u/2) \Longrightarrow du = \frac{2dt}{1+t^2}, cosu = \frac{1-t^2}{1+t^2}$.
$I$ devient :

$$I = \int_0^{\varphi} \frac{du}{cosu} = \int_0^{tg(\varphi/2)} \frac{2dt}{1-t^2} = \left[Log\left(\frac{1+t}{1-t}\right)\right]_0^{tg(\varphi/2)} = Log\left(\frac{tg\frac{\pi}{4} + tg\frac{\varphi}{2}}{1 - tg\frac{\pi}{4}.tg\frac{\varphi}{2}}\right) = Logtg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right).$$

Pour le calcul de $J$, on fait un changement de variables $t = esinu \Longrightarrow dt = ecosudu$, on obtient alors :

$$J = \int_0^{\varphi} \frac{ecosudu}{1-e^2sin^2u} = \int_0^{esin\varphi} \frac{dt}{1-t^2} = \frac{1}{2}\left[Log\left(\frac{1+t}{1-t}\right)\right]_0^{esin\varphi} = \frac{1}{2}Log\left(\frac{1+esin\varphi}{1-esin\varphi}\right) \Longrightarrow$$
$$\mathcal{L} = I - eJ = Logtg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) - \frac{e}{2}Log\left(\frac{1+esin\varphi}{1-esin\varphi}\right)$$

**Correction 26.** 1a. On a :

$$W_p = \int_0^{\Omega} sin^p\omega d\omega = \int_0^{\Omega} sin^{p-2}\omega sin^2\omega d\omega = \int_0^{\Omega} sin^{p-2}\omega(1-cos^2\omega)d\omega \Longrightarrow$$
$$W_p = \int_0^{\Omega} sin^{p-2}\omega d\omega - \int_0^{\Omega} sin^{p-2}\omega cos^2\omega d\omega = W_{p-2} - I_{p-2}$$

1.b Utilisant une intégration par parties :

$$W_p = \int_0^{\Omega} sin^p\omega d\omega = \int_0^{\Omega} sin^{p-1}\omega sin\omega d\omega = -\int_0^{\Omega} sin^{p-1}\omega d(cos\omega) =$$
$$-\left[sin^{p-1}\omega cos\omega\right]_0^{\Omega} + (p-1)\int_0^{\Omega} sin^{p-2}\omega cos^2\omega d\omega = -sin^{p-1}\Omega cos\Omega + (p-1)\int_0^{\Omega} sin^{p-2}\omega(1-sin^2\omega)d\omega \Longrightarrow$$
$$W_p = -sin^{p-1}\Omega cos\Omega + (p-1)\int_0^{\Omega} sin^{p-2}\omega d\omega - (p-1)\int_0^{\Omega} sin^p\omega d\omega \Longrightarrow$$
$$W_p = -sin^{p-1}\Omega cos\Omega + (p-1)W_{p-2} - (p-1)W_p \Longrightarrow$$
$$pW_p + sin^{p-1}\Omega cos\Omega = (p-1)W_{p-2} = (p-1)(W_p + I_{p-2}) \Rightarrow W_p + sin^{p-1}\Omega cos\Omega = (p-1)I_{p-2}$$

1.c On part de la formule démontrée en 1.a et on utlise l'expression de $I_{p-2}$ calculée en 1.b, on obtient :

$$W_p = W_{p-2} - I_{p-2} = W_{p-2} - \frac{1}{p-1}(W_p + sin^{p-1}\Omega cos\Omega) \Longrightarrow (p-1)W_p = (p-1)W_{p-2} - W_p - sin^{p-1}\Omega cos\Omega$$
$$\Longrightarrow pW_p = (p-1)W_{p-2} - sin^{p-1}\Omega cos\Omega \Longrightarrow W_p = \frac{p-1}{p}W_{p-2} - \frac{1}{p}sin^{p-1}\Omega cos\Omega$$

2. Si on remplace $p$ par 2, la formule 1.c devient :

$$W_{2p} = \frac{2p-1}{2p}W_{2(p-1)} - \frac{1}{2p}sin^{2p-1}\Omega cos\Omega$$

Pour programmer la dernière formule ci-dessus, on calcule $W_0$ obtenue par la formule 1.a soit $W_0 = \Omega$ et $W_2$ obtenue avec $p = 1$, d'où :

$$W_2 = \frac{1}{2}W_0 - \frac{1}{2}sin\Omega cos\Omega$$

La programmation devient donc facile.

**Correction 27.** On a :

$$\beta(\varphi) = \int_0^{\varphi} \rho d\varphi$$

avec :

$$\rho = \frac{a(1-e^2)}{w^3}, \quad w^2 = 1 - e^2 sin^2\varphi$$

1. On développe $w^{-3}$ suivant les puissances croissantes de $esin\varphi$. On a $w^{-3} = (1-e^2sin^2\varphi)^{-3/2}$, on utilise la formule :

$$(1+\alpha)^q = 1 + q\alpha + \frac{q(q-1)}{2!}\alpha^2 + \frac{q(q-1)(q-2)}{3!}\alpha^3 + \cdots + \frac{q(q-1)(q-2)\ldots(q-p+1)}{p!}\alpha^p$$

On obtient l'expression de $w^{-3}$ à l'ordre $e^{12}sin^{12}\varphi$, soit :

$$w^{-3} = 1 + \frac{3}{2}e^2sin^2\varphi + \frac{15}{8}e^4sin^4\varphi + \frac{35}{16}e^6sin^6\varphi + \frac{315}{128}e^8sin^8\varphi + \frac{693}{256}e^{10}sin^{10}\varphi + \frac{3003}{1024}e^{12}sin^{12}\varphi + \cdots$$

2. On a :

$$\beta(\varphi) = a(1-e^2)\int_0^{\varphi} \frac{dt}{(1-e^2sin^2t)^{3/2}} = a(1-e^2)\int_0^{\varphi} w^{-3}(t)dt = a(1-e^2)\int_0^{\varphi}(1-e^2sin^2t)^{-3/2}dt$$

D'où :

$$\frac{\beta(\varphi)}{a(1-e^2)} = \varphi + \frac{3}{2}e^2W_2 + \frac{15}{8}e^4W_4 + \frac{35}{16}e^6W_6 + \frac{315}{128}e^8W_8 + \frac{693}{256}e^{10}W_{10} + \frac{3003}{1024}e^{12}W_{12}$$

3. Si on arrête le développement au terme $e^{2n}$, on majore le terme suivant :

$$\left|\frac{\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{3}{2}-n\right)}{(n+1)!}e^{2(n+1)}a(1-e^2)\int_0^{\varphi} sin^{2n+1}tdt\right| \leq 1\,mm$$

Comme $\left|\int_0^{\varphi} sin^k t dt\right| \leq \int_0^{|\varphi|} |sin^k t|dt \leq \int_0^{|\varphi|} dt \leq \int_0^{\pi/2} dt = \frac{\pi}{2}$, la majoration devient :

$$\frac{\pi}{2}.\frac{\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{3}{2}-n\right)}{(n+1)!}e^{2(n+1)}a(1-e^2) \leq 1\,mm$$

Numériquement, on va utiliser l'ellipsoïde GRS80 avec $a = 6378\,137.00\,m$ et le carré de la première excentricité $e^2 = 0.0066\,9438$. Le calcul du membre gauche avec $n = 4$ donne $46.16\,mm$ une valeur supérieure à $1\,cm$, celui avec $n = 5$ implique une valeur inférieure à $1\,mm$ soit $0.36\,mm$.

4. On laisse au lecteur la proposition d'un organigramme de calcul.

5. Résolution du problème inverse : calcul de $\varphi$ connaissant $\beta$. Utilisant le précédent exercice ci-dessus, sachant que $W_0 = \varphi$, on obtient que :

$$\frac{\beta(\varphi)}{a(1-e^2)} = \varphi + \sum_{n=1}^{n=4} e^{2n} W_{2n}(\varphi) = C_0\varphi + F(sin\varphi, cos\varphi) = C_0\varphi + F(\varphi)$$

où $C_0$ est une constante et $F$ est une fonction polynômiale en $sin\varphi$ et $cos\varphi$. On connaît $\beta(\varphi) = A$, on obtient l'équation qui permet de calculer la latitude géodésique $\varphi$ :

$$\varphi = \frac{A}{a(1-e^2)C_0} - \frac{F(\varphi)}{C_0}$$

La résolution de l'équation ci-dessus se fait par itérations comme suit :

$$\varphi_1 = \frac{A}{a(1-e^2)C_0}$$

Puis :

$$\varphi_2 = \varphi_1 - \frac{F(\varphi_1)}{C_0}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\varphi_{j+1} = \varphi_1 - \frac{F(\varphi_j)}{C_0}$$

On fixe un nombre $\epsilon \ll 1$. Si $|\varphi_{j+1} - \varphi_j| < \epsilon$, alors $\varphi = \varphi_{j+1} = \varphi_j$, sinon on itère le processus. En prenant $\epsilon = 1,57 \times 10^{-10}$, on obtient la précision du $mm$. La résolution ci-dessus par itérations est convergente car on montre que $|\frac{F'(\varphi)}{C_0}| < 1$.

**Correction 28.** Soit l'ellipse $(E)$ définie par les équations paramétriques :

$$M \begin{cases} x = acosu \\ y = bsinu \\ \text{avec} \quad a > b > 0 \end{cases}$$

On pose :

$$e^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2}; \quad e'^2 = \frac{a^2-b^2}{b^2}$$

1. Considérons les coordonnées des foyers $F$ et $F'$ situés sur l'axe des $x$ : $F(c,0),\ F'(-c,0),\ c > 0$. Soit un point $M(x,y)$ sur l'ellipse, les distances $MF$ et $MF'$ sont comme suit :

$$MF = \sqrt{(c-x)^2 + y^2}, \quad MF' = \sqrt{(c+x)^2 + y^2}$$

Choisissons le point $M(0,b)$ sur l'axe des $y$, l'équation $MF + MF' = 2a$ devient :

$$\sqrt{c^2+b^2} + \sqrt{c^2+b^2} = 2a \Longrightarrow a = \sqrt{c^2+b^2} \Longrightarrow c^2 = a^2 - b^2 = a^2(1 - b^2/a^2) = a^2e^2 \Longrightarrow c = ae$$

2. L'équation cartésienne de l'ellipse est : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, on différentie l'équation précédente, on obtient $y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}\frac{b^2}{a^2}$. L'équation de la tangente $(T)$ au point $M(x,y)$ sur l'ellipse est donnée par :

$$Y - y = y'(x)(X - x) \Longrightarrow y'(x).X - Y + (-xy'(x) + y) = 0$$

La distance d'un point $M(x_0, y_0)$ à une droite d'équation $mx+ny+p=0$ est donnée par la formule :

$$d = \frac{|x_0 m + y_0 n + p|}{\sqrt{m^2+n^2}}$$

Par suite la distance du foyer $F(ae,0)$ à la tangente $(T)$ est donnée par :

$$d_F = \frac{|ae.y'(x)+0.(-1)+(-xy'(x)+y|)}{\sqrt{y'^2(x)+(-1)^2}} = \frac{|(y-xy')+ae.y'|}{\sqrt{1+y'^2}}$$

et celle du foyer $F'$ $d'_F$ :

$$d'_F = \frac{|(y-xy')-ae.y'|}{\sqrt{1+y'^2}}$$

On obtient facilement le produit des distances $D = d_F.d'_F$, soit :

$$D = d_F.d'_F = \frac{|(y-xy')^2 - a^2e^2.y'^2|}{1+y'^2}$$

Calculons $1+y'^2$ :

$$1+y'^2 = 1+\left(\frac{-b^2x}{a^2y}\right)^2 = 1+(1-e^2)^2\left(\frac{acosu}{bsinu}\right)^2 = 1+(1-e^2)^2\left(\frac{1}{1-e^2}.\frac{cos^2u}{sin^2u}\right) = \frac{1-e^2cos^2u}{sin^2u}$$

Calculons maintenant le numérateur $N=(y-xy')^2-a^2e^2.y'^2$ sachant que $y'=-(bcosu)/(asinu)$ :

$$N=(y-xy')^2-a^2e^2.y'^2 = y^2-2xyy'+y'^2(x^2-a^2e^2) = b^2sin^2u-2abcosusinu.y'+y'^2(a^2cos^2u-a^2e^2)$$

$$\Longrightarrow N = b^2sin^2u+2absinucosu.\tfrac{bcosu}{asinu}+a^2.\tfrac{b^2cos^2u}{a^2sin^2u}(cos^2u-e^2) = b^2\left[sin^2u+2cos^2u+\frac{cos^2u}{sin^2u}(cos^2u-e^2)\right]$$

$$N = \frac{b^2}{sin^2u}(sin^2u+cos^2u(1-cos^2u)+cos^4u-e^2cos^2u) = \frac{b^2}{sin^2u}(1-e^2cos^2u) > 0 \Longrightarrow$$

$$D = \frac{N}{(1-e^2cos^2u)/sin^2u} = b^2$$

On retrouve que $D = d_F.d'_F = b^2$ est indépendant de la variable $u$.

3. On a : $ds^2 = dx^2+dy^2 = (a^2sin^2u+b^2cos^2u)du^2 = a^2(1-e^2cos^2u)du^2$, d'où :

$$ds = +a\sqrt{1-e^2cos^2u}.du$$

4. Déterminer les expressions des vecteurs unitaires $\boldsymbol{T}$ et $\boldsymbol{N}$ et en déduire le rayon de coubure de l'ellipse.

$$\boldsymbol{T} = \frac{dM}{ds} = \begin{cases} t_x = \dfrac{dx}{ds} = \dfrac{-sinu}{\sqrt{1-e^2cos^2u}} \\ \\ t_y = \dfrac{dy}{ds} = \dfrac{\sqrt{1-e^2}cosu}{\sqrt{1-e^2cos^2u}} \end{cases} \qquad \frac{\boldsymbol{dT}}{ds} = \begin{cases} \dfrac{dt_x}{ds} = \dfrac{dt_x}{du}\dfrac{du}{ds} = \dfrac{-(1-e^2)cosu}{a(1-e^2cos^2u)^2} \\ \\ \dfrac{dt_y}{ds} = \dfrac{dt_y}{du}\dfrac{du}{ds} = \dfrac{-\sqrt{1-e^2}sinu}{a(1-e^2cos^2u)^2} \end{cases}$$

Le vecteur normal à l'ellipse $\boldsymbol{N}$ est donné par : $\boldsymbol{N} = \frac{1}{\alpha}\frac{\boldsymbol{dT}}{ds}$ et $\alpha = \left\|\frac{\boldsymbol{dT}}{ds}\right\| = \frac{1}{R}$.D'où :

$$\boldsymbol{N} = \begin{cases} \dfrac{-\sqrt{1-e^2}cosu}{\sqrt{1-e^2cos^2u}} \\ \\ \dfrac{-sinu}{\sqrt{1-e^2cos^2u}} \end{cases}, \quad \alpha = \left\|\frac{\boldsymbol{dT}}{ds}\right\| = \frac{\sqrt{1-e^2}}{a}.\frac{1}{(1-e^2cos^2u)^{3/2}} \Rightarrow R = \frac{a}{\sqrt{1-e^2}}.(1-e^2cos^2u)^{3/2}$$

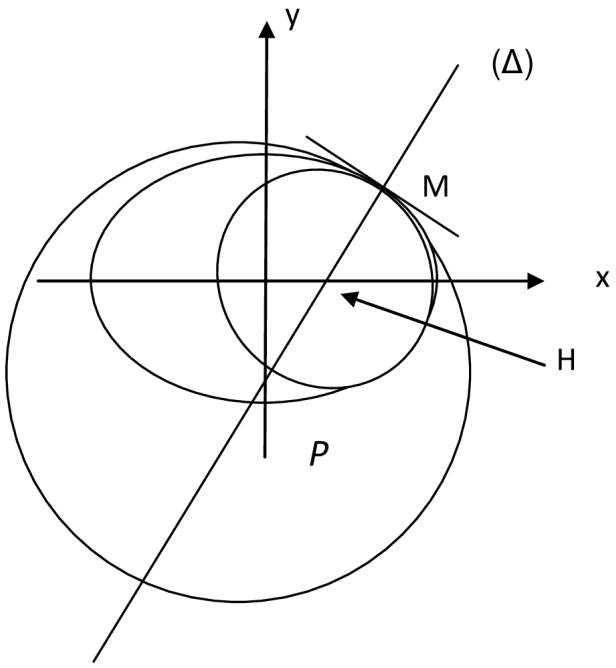



FIGURE 23 – Les deux cercles dits surosculateurs

Vérifier le calcul en remplaçant $cosu = f(\varphi)$ et trouver $R = \rho(\varphi)$.

5. Soit $(\Delta)$ la droite normale à la tangente au point $M$ sur l'ellipse, elle coupe l'axe des $x$ au point $H$ et l'axe des $y$ en $P$. Ces points $H(X_H, 0)$ et $P(0, Y_P)$ sont respectivement les centres deux cercles tangents en $M$. L'équation de la normale $(\Delta)$ est :

$$Y - y = \frac{-1}{y'(x)}(X - x), \quad y'(x) = -\frac{bcosu}{asinu}$$

On obtient facilement $X_H = ae^2 cosu, Y_P = -be'^2 sinu$.

6. Prenons $M$ le sommet sur l'axe des $y$, soit $M(0, +b)$. Donc $u = +\pi/2$, les coordonnées des deux centres deviennent : $X_H = 0$ et $Y_P = -be'^2 > -b$. Le centre du petit cercle est l'origine des axes, celui du grand cercle est entre l'origine des axes et le sommet inférieur de l'ellipse.

**Correction 29.** 1. La définition géométrique de l'ellipse est donnée par :

$$MF + MF' = constante = 2a$$

L'expression de la formule est symétrique, on peut écrire que les coordonnnées des points $F, F'$ sont comme suit :

$$F = (c, 0), \quad F' = (-c, 0), \quad c > 0$$

Si le point $M$ se trouve sur le petit sommet sur l'axe des $y$, la distance $MF = MF' = (2a)/2 = a = \sqrt{b^2 + c^2}$, par suite, on obtient $c$ en fonction de $a$ et $b$, ce dernier est le demi-petit axe de l'ellipse, d'où :

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{a^2\left(\frac{a^2 - b^2}{a^2}\right)} = \sqrt{a^2 e^2} = a.e$$

Ecrivons la formule en fonction des coordonnées, on obtient :

$$\sqrt{(x - ae)^2 + y^2} + \sqrt{(x + ae)^2 + y^2} = 2a \Longrightarrow \sqrt{(x - ae)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x + ae)^2 + y^2} \Longrightarrow$$

$$(x-ae)^2+y^2=4a^2+(x+ae)^2+y^2-4a\sqrt{(x+ae)^2+y^2}\Longrightarrow$$
$$a+ex=\sqrt{(x+ae)^2+y^2}\Longrightarrow(a+ex)^2=(x+ae)^2+y^2\Longrightarrow$$
$$a^2(1-e^2)=x(1-e^2)+y^2\Longrightarrow 1=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2(1-e^2)}\Longrightarrow\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ Q.E.D$$

**Correction 30.** 1. Rappelons que $N=\dfrac{a}{\sqrt{1-e^2sin^2\varphi}}=a(1-e^2sin^2\varphi)^{-1/2}$, par suite la dérivée de $N$ par rappport à $\varphi$ est :

$$N'_\varphi=a\left(-\frac{1}{2}\right)(-2e^2sin\varphi cos\varphi)(1-e^2sin^2\varphi)^{-3/2}=ae^2sin\varphi cos\varphi.(1-e^2sin^2\varphi)^{-3/2}=\frac{e^2N.sin\varphi cos\varphi}{1-e^2sin^2\varphi}$$

On obtient alors :

$$(Ncos\varphi)'_\varphi=-Nsin\varphi+cos\varphi N'_\varphi=-Nsin\varphi+cos\varphi.\frac{e^2N.sin\varphi cos\varphi}{1-e^2sin^2\varphi}\Longrightarrow$$
$$(Ncos\varphi)'_\varphi=-Nsin\varphi\left(1-\frac{e^2cos^2\varphi}{1-e^2sin^2\varphi}\right)=-Nsin\varphi\left(\frac{1-e^2(sin^2\varphi+cos^2\varphi)}{1-e^2sin^2\varphi}\right)\Longrightarrow$$
$$(Ncos\varphi)'_\varphi=\frac{d(Ncos\varphi)}{d\varphi}=-Nsin\varphi\left(\frac{1-e^2}{1-e^2sin^2\varphi}\right)=\frac{-a(1-e^2)}{(1-e^2sin^2\varphi)^{3/2}}.sin\varphi=-\rho.sin\varphi$$

**Correction 31.** Les équations de l'ellipsoïde de révolution sont comme suit :

$$M=\begin{cases}X=Ncos\varphi cos\lambda\\ Y=Ncos\varphi sin\lambda\\ Z=N(1-e^2)sin\varphi\end{cases}$$

1. On obtient :

$$\frac{\partial\boldsymbol{M}}{\partial\lambda}=\begin{pmatrix}-Ncos\varphi sin\lambda\\ Ncos\varphi cos\lambda\\ 0\end{pmatrix},\quad\frac{\partial\boldsymbol{M}}{\partial\varphi}=\begin{pmatrix}-\rho sin\varphi cos\lambda\\ -\rho sin\varphi sin\lambda\\ \rho cos\varphi\end{pmatrix}\Rightarrow\frac{\partial\boldsymbol{M}}{\partial\lambda}\wedge\frac{\partial\boldsymbol{M}}{\partial\varphi}=\begin{pmatrix}N\rho cos^2\varphi cos\lambda\\ N\rho cos^2\varphi sin\lambda\\ N\rho cos\varphi sin\varphi\end{pmatrix}$$

2. On obtient les coefficients :

$$E=\frac{\partial\boldsymbol{M}}{\partial\lambda}.\frac{\partial\boldsymbol{M}}{\partial\lambda}=N^2cos^2\varphi,\quad F=\frac{\partial\boldsymbol{M}}{\partial\lambda}.\frac{\partial\boldsymbol{M}}{\partial\varphi}=0,\quad G=\frac{\partial\boldsymbol{M}}{\partial\varphi}.\frac{\partial\boldsymbol{M}}{\partial\varphi}=\rho^2$$

3. L'expression de la première forme fondamentale s'écrit :

$$ds^2=E.d\lambda^2+2Fd\lambda.d\varphi+G.d\varphi^2=N^2cos^2\varphi d\lambda^2+\rho^2d\varphi^2$$

4. De la question 1., on obtient la norme du vecteur $\boldsymbol{M}'_\lambda\wedge\boldsymbol{M}'_\varphi$, ce qui donne :

$$\left\|\frac{\partial\boldsymbol{M}}{\partial\lambda}\wedge\frac{\partial\boldsymbol{M}}{\partial\varphi}\right\|=N\rho cos\varphi,\ cos\varphi>0$$

Par suite, le vecteur normal unitaire $\boldsymbol{n}$ :

$$\boldsymbol{n}=\frac{\partial\boldsymbol{M}}{\partial\lambda}\wedge\frac{\partial\boldsymbol{M}}{\partial\varphi}\frac{1}{\left\|\frac{\partial\boldsymbol{M}}{\partial\lambda}\wedge\frac{\partial\boldsymbol{M}}{\partial\varphi}\right\|}=\begin{pmatrix}cos\varphi cos\lambda\\ cos\varphi sin\lambda\\ sin\varphi\end{pmatrix}$$

Le vecteur normal unitaire est dirigé vers l'extérieur de l'ellipsoïde.

5. Calculons les vecteurs :

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{M}}{\partial \lambda^2} = \begin{pmatrix} -N cos\varphi cos\lambda \\ -N cos\varphi sin\lambda \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial^2 \boldsymbol{M}}{\partial \lambda \partial \varphi} = \begin{pmatrix} +\rho sin\varphi sin\lambda \\ -\rho sin\varphi cos\lambda \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pour le calcul du $\boldsymbol{M}"_{\varphi,\varphi}$, on ne calcule pas $\rho' = \frac{d\rho}{d\varphi}$, on obtient alors :

$$\boldsymbol{M}"_{\varphi,\varphi} = \frac{\partial^2 \boldsymbol{M}}{\partial \varphi^2} = \rho . \begin{pmatrix} -cos\varphi cos\lambda \\ -cos\varphi sin\lambda \\ -sin\varphi \end{pmatrix} + \rho' . \begin{pmatrix} -sin\varphi cos\lambda \\ -sin\varphi sin\lambda \\ cos\varphi \end{pmatrix}$$

6. D'où les coefficients (à ne pas confondre $N$ avec la grande normale $N$) :

$$L = n.\frac{\partial^2 \boldsymbol{M}}{\partial \lambda^2} = -N cos^2\varphi, \quad M = n.\frac{\partial^2 \boldsymbol{M}}{\partial \lambda \partial \varphi} = 0, \quad N = n.\frac{\partial^2 \boldsymbol{M}}{\partial^2 \varphi} = -\rho$$

7. La deuxième forme fondamentale $\Phi(\lambda, \varphi)$ s'écrit :

$$\Phi(\lambda, \varphi) = L.d\lambda^2 + 2M.d\lambda d\varphi + N.d\varphi^2 = -N cos^2\varphi d\lambda^2 - \rho d\varphi^2$$

8. La formule du cours donne le calcul des rayons principaux de courbure à partir de la valeur $K$ appelée courbure totale ou courbure de Gauss et qui vaut $K = \frac{1}{R_1.R_2}$. $K$ vaut :

$$K = \frac{\text{Dét}(\Phi_2)}{\text{Dét}(\Phi_1)} = \frac{L.N - M^2}{E.G - F^2} = \frac{1}{\rho R_2}$$

Soit :

$$K = \frac{\rho.N.cos^2\varphi}{N^2 cos^2\varphi \rho^2} = \frac{1}{\rho N} = \frac{1}{\rho R_2} \Longrightarrow R_2 = N = N(\varphi) = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 sin^2\varphi}}$$

la grande normale est le rayon de courbure de la section normale au point $M$ perpendiculaire au plan de la méridienne de l'ellipsoïde de révolution.

Les questions 9. et 10. sont déjà traitées dans les exercises ci-dessus.

**Correction 32.** Sur l'ellipsoïde, on note $\varphi$ la latitude géodésique et $\psi$ la latitude réduite.
1. $\rho$ est donné par la formule :

$$\rho = a(1 - e^2)(1 - e^2 sin^2\varphi)^{-3/2}$$

On a vu dans l'un des exercices précédents l'expression de $sin\varphi = f(\psi)$. On a alors :

$$sin\varphi = \frac{asin\psi}{\sqrt{a^2 sin^2\psi + b^2 cos^2\psi}}$$

On fait intervenir le $e^2 = (a^2 - b^2)/a^2 \Longrightarrow b/a = \sqrt{1 - e^2}$. De plus :

$$a^2 sin^2\psi + b^2 cos^2\psi = a^2(sin^2\psi + (b/a)^2 cos^2\psi) = a^2(1 - cos^2\psi + (1 - e^2)cos^2\psi) \Longrightarrow$$
$$a^2 sin^2\psi + b^2 cos^2\psi = a^2(1 - e^2 cos^2\psi) \Longrightarrow sin\varphi = \frac{sin\psi}{\sqrt{1 - e^2 cos^2\psi}}$$

Par suite :

$$1 - e^2 sin^2\varphi = 1 - e^2 . \frac{sin^2\psi}{1 - e^2 cos^2\psi} = \frac{1 - e^2 cos^2\psi - e^2(1 - cos^2\psi)}{1 - e^2 cos^2\psi} = \frac{1 - e^2}{1 - e^2 cos^2\psi}$$

Finalement, on obtient l'expression de $\rho$ en fonction de $\psi$ :

$$\rho = a(1-e^2)(1-e^2 sin^2\varphi)^{-3/2} = \frac{a(1-e^2cos^2\psi)^{3/2}}{\sqrt{1-e^2}}$$

2. A l'équateur, $\psi = 0\,rd \Longrightarrow cos\psi = 1$, d'où $\rho_e = a(1-e^2)$. Au pôle nord, $\psi = \pi/2\,rd \Longrightarrow cos\psi = 0$ et $\rho_p = \frac{a}{\sqrt{1-e^2}}$. Eliminons le paramètre $a$, on trouve $\frac{\rho_e}{\rho_p} = (1-e^2)^{3/2}$. L'aplatissement de l'ellipsoïde noté $\alpha$ vaut $(a-b)/a$, d'où :

$$\alpha = 1-b/a \Longrightarrow 1-e^2 = (1-\alpha)^2 \Longrightarrow \alpha = 1-\sqrt{1-e^2} \Longrightarrow \alpha = 1-\left(\frac{\rho_e}{\rho_p}\right)^{1/3}$$

3. Application numérique : $\rho_p = 111\,695\,m$ et $\rho_e = 110\,573\,m$ ce qui donne :

$$\alpha = 1-\left(\frac{110\,573}{111\,695}\right)^{1/3} = 1-(0.989\,954\,787\,591)^{1/3} = 1-0.996\,640\,321\,062 = 0.003\,359\,678\,938$$

**Correction 33.** On donne les coordonnées tridimensionnelles suivantes d'un point $M$ :

$$M = (X,Y,Z) = (4\,300\,244.860\,m, 1\,062\,094.681\,m, 4\,574\,775.629\,m)$$

Les paramètres de l'ellipsoïde de référence sont $a = 6\,378\,137.00\,m$, $\quad e^2 = 0.006\,694\,38$.

1. On a $e^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2} = 1-\frac{b^2}{a^2} \Longrightarrow b = a\sqrt{1-e^2}$, d'où la valeur numérique $b = 6\,378\,137 \times \sqrt{0.993\,305\,620} = 6\,356\,752.314\,m$.

2. L'aplatissement $\alpha = \frac{a-b}{a} = \frac{21\,384.680}{6\,378\,137} = 1/298,257\,220\,143\,42$.

3. La longitude est donnée par : $tg\lambda = Y/X = 1\,062\,094.681/4\,300\,244.860 = 0,246\,984\,698\,680\,624 \Longrightarrow$ $\boxed{\lambda = 15,415\,03\,gr}$.

Le calcul de $\varphi$ se fait par itération. On calcule $r = \sqrt{X^2+Y^2} = 4\,429\,463.959\,m$. La première valeur de la latitude géodésique $\varphi_1$ est obtenue par $tg\varphi_1 = \frac{Z}{r} = \frac{4\,574\,775.629}{4\,429\,463.959} = 1.032\,805\,700\,948 \Longrightarrow$ $\varphi_1 = 51.027\,297\,gr$.
On calcule $N(\varphi_1)e^2 sin\varphi_1 = 30\,728.1915\,m$, $Z' = Z+N(\varphi_1)e^2 sin\varphi_1 = 4\,605\,503.8205\,m$, $tg\varphi_2 = Z'/r = 1.039\,742\,926\,713 \Longrightarrow \varphi_2 = 51.240\,2510\,gr$.
On calcule $N(\varphi_2)e^2 sin\varphi_2 = 30\,827.8887\,m$, $Z' = Z+N(\varphi_2)e^2 sin\varphi_2 = 4\,605\,603.5177\,m$, $tg\varphi_3 = Z'/r = 1.039\,765\,434\,448 \Longrightarrow \varphi_3 = 51.240\,9395\,gr$.
On calcule $N(\varphi_3)e^2 sin\varphi_3 = 30\,828.2104\,m$, $Z' = Z+N(\varphi_3)e^2 sin\varphi_3 = 4\,605\,603.8394\,m$, $tg\varphi_4 = Z'/r = 1.039\,765\,507\,075 \Longrightarrow \varphi_4 = 51.240\,9417\,gr$.
On calcule $N(\varphi_4)e^2 sin\varphi_4 = 30\,828.2115\,m$, $Z' = Z+N(\varphi_4)e^2 sin\varphi_4 = 4\,605\,603.8405\,m$, $tg\varphi_5 = Z'/r = 1.039\,765\,507\,323 \Longrightarrow \varphi_5 = 51.240\,9418\,gr$.
Au cinquième chiffre après la virgule, $\varphi_4$ et $\varphi_5$ sont égaux, on arrête donc le calcul et $\boxed{\varphi = 51.240\,94\,gr}$.
Le calcul de l'altitude ellipsoïdique est obtenu par $he = \frac{r}{cos\varphi} - N(\varphi) = 6\,389\,971.468 - 6\,389\,925.468 =$ $\boxed{715.000\,m = he}$.

**Correction 34.**
1. L'équation de Clairaut pour la géodésique $(g)$ de l'ellipsoïde s'écrit : $rsinAz = Ncos\varphi sinAz = cte = a.sinAz_E$ où $r$ est le rayon du parallèle de latitude géodésique $\varphi$ et $Az$ l'azimut de la géodésique $(g)$.

2. On note $r'$ le rayon du parallèle passant par $M'$ de la géodésique $(g')$. A l'équateur, les deux géodésiques $(g)$ et $(g')$ ont même azimut $Az_E$. L'équation de Clairaut pour la géodésique $(g')$ s'écrit

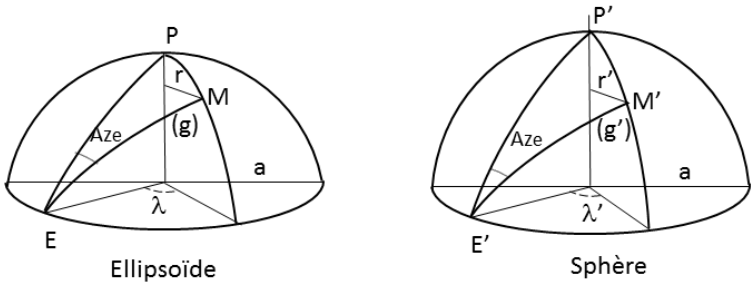



FIGURE 24 – La Correspondance de la sphère de Jacobi

$r'sinAz' = acos\varphi' sinAz' = cte = asinAz_E$.

3. Des équations de Clairaut aux questions 1. et 2., et comme $Az = Az'$, on obtient :

$$Ncos\varphi.sinAz = asinAz_E = acos\varphi'.sinAz \Longrightarrow Ncos\varphi = acos\varphi'$$

soit $cos\varphi' = \dfrac{cos\varphi}{\sqrt{1-e^2sin^2\varphi}}$. Le membre à droite a été calculé dans l'un des exercices ci-dessus, ça correspond à $cos\psi$ où $\psi$ est la latitude paramétrique correspondante du point $M$ de latitude géodésique $\varphi$ donc $\varphi' = \psi$.

4. De la (**Fig. 25**), on peut écrire au point $M$ de la géodésique $(g)$ :

$$tgAz_g = \frac{r.d\lambda}{\rho.d\varphi} = \frac{N(\varphi)cos\varphi d\lambda}{\rho(\varphi)d\varphi}$$

De même, sur la géodésique $(g')$, on a aussi :

$$tgAz_{g'} = \frac{r'.d\lambda'}{a.d\varphi'} = \frac{acos\varphi' d\lambda'}{a.d\varphi'} = \frac{cos\varphi' d\lambda'}{d\varphi'}$$

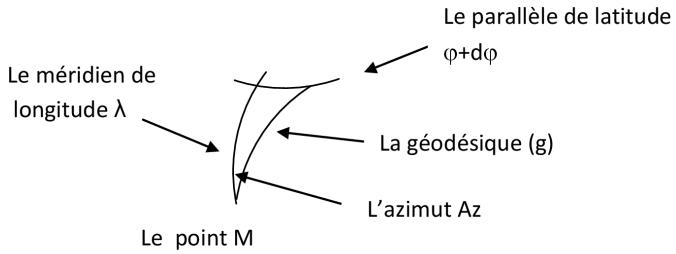



FIGURE 25 – Le triangle infinitésimal au point $M$

5. De la conservation des azimuts sur les 2 géodésiques $(g)$ et $(g')$, on a donc :

$$tgAz_g = tgAz_{g'} \Longrightarrow \frac{Ncos\varphi d\lambda}{\rho d\varphi} = \frac{cos\varphi' d\lambda'}{d\varphi'} \Longrightarrow d\lambda = \frac{\rho d\varphi}{Ncos\varphi}.\frac{cos\varphi'}{d\varphi'}d\lambda'$$

De la question 3., on a $Ncos\varphi = acos\varphi'$, d'où :

$$d\lambda = \frac{\rho d\varphi}{acos\varphi'}\frac{cos\varphi'}{d\varphi'}d\lambda' = \frac{\rho d\varphi}{ad\varphi'}.d\lambda'$$

Le numérateur $\rho d\varphi = ds(\varphi)$ l'élément de longueur sur la méridienne de l'ellipse, dans la correction 28 ci-dessus, 3ème question, on a calculé l'élément $ds$ en fonction de la latitude paramétrique $\psi = \varphi'$ et on a $ds(\varphi') = a\sqrt{1-e^2cos^2\varphi'}d\varphi'$ ce qui donne :

$$d\lambda = \frac{\rho d\varphi}{ad\varphi'}.d\lambda' = \frac{a\sqrt{1-e^2cos^2\varphi'}d\varphi'}{ad\varphi'}d\lambda' = \sqrt{1-e^2cos^2\varphi'}d\lambda'$$

6. En intégrant l'équation précédente, on obtient :

$$\lambda - \lambda_E = \int_{\lambda_E}^{\lambda'+\lambda_E} \sqrt{1-e^2cos^2\varphi'}d\lambda'$$

avec $\lambda > \lambda_E$ et $\lambda'$ est comptée à partir de $\lambda_E$.

7. En écrivant $\sqrt{1-e^2cos^2\varphi'} = 1 - \frac{e^2}{2}cos^2\varphi' + o(e^4)$ où $o(e^4)$ est un infiniment petit d'ordre 4 en $e$ dont on néglige. L'intégrale précédente entre $\lambda_E$ et $\lambda_E + \lambda$ devient :

$$\lambda - \lambda_E = \int_{\lambda_E}^{\lambda'+\lambda_E} d\lambda' - \frac{e^2}{2}\int_{\lambda_E}^{\lambda'+\lambda_E} cos^2\varphi' d\lambda' = \lambda' - \frac{e^2}{2}\int_{\lambda_E}^{\lambda'+\lambda_E} cos^2\varphi' d\lambda'$$

8. Comme $(g')$ est une géodésique de la sphère, on démontre que :

$$cos^2\varphi' d\lambda' = \frac{sinAz_E}{a}ds'$$

où $ds'$ est l'élément différentiel de l'abscisse curviligne sur la géodésique $(g')$ (un grand cercle). Alors en posant $s' = 0$ au point $E'$, on obtient la formule donnant $\lambda$ comme suit :

$$\lambda = \lambda' + \lambda_E - \frac{e^2}{2}\int_0^{s'} \frac{sinAz_E}{a}ds'$$

9. On suppose que la géodésique $(g')$ coupe une première fois le plan de l'équateur en un point $F'$, la géodésique $g'$ est un grand cercle de diamètre passant par l'origine du référentiel 3D et du point $E$, le point $F$ est à l'opposé du point $E$, par suite la longitude de $F$ est égale à $\pi$ à partir de $E$. La distance de $E$ à $F$ suivant la géodésique $(g')$ est la moitié du périmètre du cercle de rayon $a$, soit $s' = (2\pi a)/2 = \pi a$, on obtient alors :

$$\begin{aligned} \lambda'_F &= \pi \\ s' &= \pi a \\ \lambda_F &= \lambda_E + \pi - \frac{e^2\pi sinAz_E}{2} \end{aligned}$$

10. La géodésique $(g')$ partant de $F'$ a pour azimut $\pi - Az_E$, elle coupe une deuxième fois l'équateur au point $E'$, mais la géodésique $(g)$ sur l'ellipsoïde coupe une deuxième fois le plan de l'équateur au point correspondant à $H$ dont la longitude est $\lambda_H$. Cette dernière est donnée par :

$$\lambda_H = \pi - \frac{e^2\pi sin(\pi - Az_E)}{2} + \lambda_F = \pi - \frac{e^2\pi sinAz_E}{2} + \lambda_E + \pi - \frac{e^2\pi sinAz_E}{2} = \lambda_E + 2\pi - e^2\pi sinAz_E$$

Les lignes géodésiques de l'ellipsoïde de révolution ne se coupent pas après un tour autour de l'ellipsoïde, numériquement l'écart est de $-0.015rd$.

**Correction 35.** Un point $M$ de la surface d'une sphère $(S)$ de rayon $R$, a pour coordonnées $(X, Y, Z)$ dans un repère orthonormé :

$$M = (X, Y, Z) = (Rcos\varphi.cos\lambda, Rcos\varphi.sin\lambda, Rsin\varphi)$$

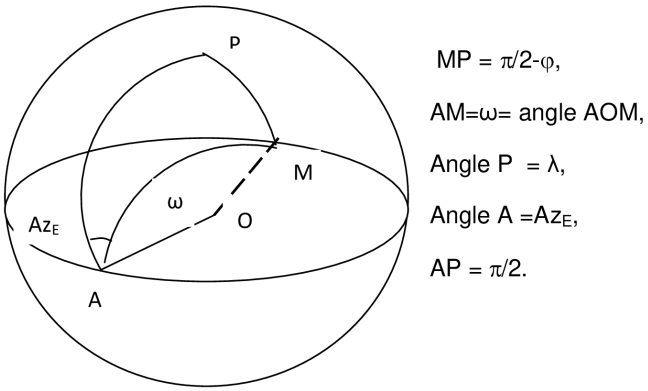



FIGURE 26 – Triangle sphérique

1. On prend $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{OM}/R$, c'est un vecteur unitaire normal au plan tangent à la sphère au poin $M$, dirigé vers l'extérieur de la sphère, ses composantes sont :

$$\boldsymbol{n} = (cos\varphi.cos\lambda, cos\varphi.sin\lambda, sin\varphi)^T$$

2. Soit $(C)$ le grand cercle passant par le point $A(R,0,0)$ et d'azimut $Az_E$. Le point $M$ peut être décrit par son abscisse curviligne $s$ mesurant l'arc $AM$. On note par $\omega$ représente l'angle au centre de l'arc $AM$. Utilisant la trigonométrie sphérique, on utilise la formule des sinus dans le triangle sphérique $PAM$ (**Fig. 26**) ce qui donne :

$$\frac{sin\lambda}{sin\omega} = \frac{sinAz_E}{sin(\pi/2-\varphi)} \Longrightarrow cos\varphi.sin\lambda = sin\omega.sinAz_E$$

3. On utilise la formule fondamentale de la trigonométrie sphérique dans le triangle APM, on obtient les deux relations :

$$\begin{array}{l} cos\omega = cos\frac{\pi}{2}.cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)+sin\frac{\pi}{2}.sin\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right).cos\lambda \Longrightarrow cos\omega = cos\varphi.cos\lambda \\ cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right) = cos\frac{\pi}{2}.cos\omega + sin\frac{\pi}{2}sin\omega cosAz_E \Longrightarrow sin\varphi = sin\omega.cosAz_E \end{array}$$

4. Les les coordonnées $(X,Y,Z)$ de $M$ s'écrivent en fonction de $s$ comme suit :

$$M = (X,Y,Z)\begin{cases} X = Rcos\varphi cos\lambda = R.cos\omega = Rcos(s/R) \\ Y = Rcos\varphi sin\lambda = RsinAz_E sin\omega = RsinAz_E sin(s/R) \\ Z = Rsin\varphi = RcosAz_E sin\omega = RcosAz_E sin(s/R) \end{cases}$$

5. Le vecteur $\boldsymbol{T}$ est donné par $\dfrac{d\boldsymbol{M}}{ds}$ :

$$\boldsymbol{T} = \begin{cases} \frac{dX}{ds} = -sin(s/R) \\ \frac{dY}{ds} = sinAz_E cos(s/R) \\ \frac{dZ}{ds} = cosAz_E cos(s/R) \end{cases}$$

Calculons $d\boldsymbol{T}/ds$, on obtient :

$$\frac{d\boldsymbol{T}}{ds} = \begin{cases} \frac{d^2X}{ds^2} = -\frac{1}{R}cos(s/R) \\ \frac{d^2Y}{ds^2} = -\frac{1}{R}sinAz_E sin(s/R) \\ \frac{d^2Z}{ds^2} = -\frac{1}{R}cosAz_E sin(s/R) \end{cases} \Longrightarrow \left\|\frac{d\boldsymbol{T}}{ds}\right\| = \frac{1}{R}$$

D'où le vecteur $\boldsymbol{N}=\frac{\frac{d\boldsymbol{T}}{ds}}{\left\|\frac{d\boldsymbol{T}}{ds}\right\|}$ :

$$\boldsymbol{N}=\begin{cases} N_X=-cos(s/R)=-cos\omega \\ N_Y=-sinAz_E sin(s/R)=-sinAz_E.sin\omega \\ N_Z=-cosAz_E sin(s/R)=-cosAz_E.sin\omega \end{cases}$$

6. On vérifie facilement que $\boldsymbol{n}$ et $\boldsymbol{N}$ sont parallèles.
7. Comme le point $M$ décrit un grand cercle d'azimut $Az_E$ à l'équateur (voir **Fig.** 26) et en $M$ le vecteur $\boldsymbol{N}$ orthogonal au cercle et que $\boldsymbol{n}$ le vecteur unitaire normal au plan tangent à la sphère au point $M$ est parallèle à $\boldsymbol{N}$, et qu'une définition d'une ligne géodésique les vecteurs $\boldsymbol{N}$ et $\boldsymbol{n}$ soient parallèles. Donc les géodésiques de la sphère sont les grands cercles.

**Correction 36.** Soit le tore $\mathbb{T}$ défini par les équations suivantes :

$$M(\varphi,\lambda)=\begin{cases} x=(a+Rcos\varphi)cos\lambda \\ y=(a+Rcos\varphi)sin\lambda \\ z=Rsin\varphi \end{cases}$$

où $a,R$ deux constantes positives avec $a>R$, $(\varphi,\lambda)\in[0,2\pi]\times[0,2\pi]$.
1. Calculons la première forme fondamentale $ds^2$ :

$$\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial\varphi}\left|\begin{array}{l} -Rsin\varphi cos\lambda \\ -Rsin\varphi sin\lambda \\ Rcos\varphi \end{array}\right. , \quad \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial\lambda}\left|\begin{array}{l} -(a+Rcos\varphi)sin\lambda \\ (a+Rcos\varphi)cos\lambda \\ 0 \end{array}\right. \Longrightarrow$$

$$E=\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial\varphi}.\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial\varphi}=\left\|\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial\varphi}\right\|^2=R^2,\quad F=\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial\varphi}.\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial\lambda}=0,\quad G=\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial\lambda}.\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial\lambda}=\left\|\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial\lambda}\right\|^2=(a+Rcos\varphi)^2\Longrightarrow$$
$$ds^2=E.d\varphi^2+2F.d\varphi d\lambda+G.d\lambda^2=R^2d\varphi^2+(a+Rcos\varphi)^2d\lambda^2$$

2. Avec les notations usuelles, on obtient :

$$\frac{\partial E}{\partial\varphi}=E'_\varphi=0,\quad \frac{\partial E}{\partial\lambda}=E'_\lambda=0,\quad \frac{\partial F}{\partial\varphi}=F'_\varphi=0$$
$$\frac{\partial F}{\partial\lambda}=F'_\lambda=0,\quad \frac{\partial G}{\partial\varphi}=G'_\varphi=-2Rsin\varphi(a+Rcos\varphi),\quad \frac{\partial G}{\partial\lambda}=G'_\lambda=0$$

On rappelle la définition de la ligne géodésique d'une surface donnée $(S)$ :

**Définition 80.** Une courbe $(\Gamma)$ est dite ligne géodésique de la surface $(S)$ si et seulement si les vecteurs $\boldsymbol{n}$ et $\boldsymbol{N}$ sont colinéaires.

$\boldsymbol{n}$ le vecteur unitaire normal à la surface $(S)$ et $N$ le vecteur normal à la courbe $(\Gamma)$.

On calcule l'expression de $\boldsymbol{N}$, on obtient :

$$\boldsymbol{N}=R\frac{d\boldsymbol{T}}{ds},\quad R\text{ est le rayon de courbure de la courbe }(\Gamma)$$

or :

$$\boldsymbol{T}=\frac{d\boldsymbol{M}}{ds}=\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial u}\frac{du}{ds}+\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial v}\frac{dv}{ds}$$

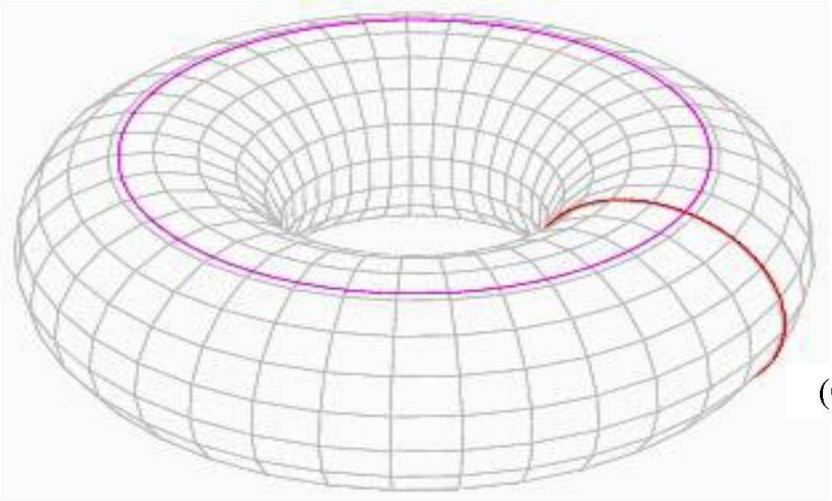



FIGURE 27 – Le Tore $\mathbb{T}$

d'où :

$$\frac{d\boldsymbol{T}}{ds} = \frac{\partial^2 \boldsymbol{M}}{\partial u^2}\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 \boldsymbol{M}}{\partial u \partial v}\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial u}\frac{d^2u}{ds^2} + \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial v}\frac{d^2v}{ds^2} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{M}}{\partial v^2}\left(\frac{dv}{ds}\right)^2$$

La condition $\boldsymbol{n}$ // $\boldsymbol{N}$ peut être écrite :

$$\boldsymbol{N} \wedge \boldsymbol{n} = 0$$

soit :

$$R\frac{d\boldsymbol{T}}{ds} \wedge \left(\frac{\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial u}}{H}\right) = 0 \tag{18.1}$$

Utilisant la formule du produit vectoriel :

$$\boldsymbol{A} \wedge (\boldsymbol{B} \wedge \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A}.\boldsymbol{C})\boldsymbol{B} - (\boldsymbol{A}.\boldsymbol{B})\boldsymbol{C} \tag{18.2}$$

on obtient :

$$\left(\frac{d\boldsymbol{T}}{ds}.\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial v}\right)\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial u} - \left(\frac{d\boldsymbol{T}}{ds}.\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial u}\right)\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial v} = 0$$

Or $\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial u}$ et $\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial v}$ forment une base du plan tangent en M, d'où les deux conditions :

$$\frac{d\boldsymbol{T}}{ds}.\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial v} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d\boldsymbol{T}}{ds}.\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial u} = 0 \tag{18.3}$$

Ce qui donne deux équations différentielles du second ordre :

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{M}}{\partial u^2}.\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial v}\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + F\frac{d^2u}{ds^2} + 2\frac{\partial^2 \boldsymbol{M}}{\partial u \partial v}.\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial v}\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{M}}{\partial v^2}.\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial v}\left(\frac{dv}{ds}\right)^2 + G\frac{d^2v}{ds^2} = 0 \tag{18.4}$$

et :

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{M}}{\partial v^2}.\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial u}\left(\frac{dv}{ds}\right)^2 + F\frac{d^2v}{ds^2} + 2\frac{\partial^2 \boldsymbol{M}}{\partial u \partial v}.\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial u}\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{M}}{\partial u^2}.\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial u}\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + E\frac{d^2u}{ds^2} = 0 \tag{18.5}$$

ces 2 dernières équations peuvent être écrites :

$$\boxed{(F'_u - \frac{E'_v}{2})\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + F\frac{d^2u}{ds^2} + G'_u\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + \frac{G'_v}{2}\left(\frac{dv}{ds}\right)^2 + G\frac{d^2v}{ds^2} = 0} \tag{18.6}$$

$$\boxed{(F'_v - \frac{G'_u}{2})\left(\frac{dv}{ds}\right)^2 + F\frac{d^2v}{ds^2} + E'_v\frac{dv}{ds}\frac{du}{ds} + \frac{E'_u}{2}\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + E\frac{d^2u}{ds^2} = 0} \tag{18.7}$$

En effet, prenons l'exemple du coefficient $A = \frac{\partial^2 \boldsymbol{M}}{\partial u^2}.\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial v}$ dans l'équation (18.4). On différentie $F$ par rapport à $u$, ce qui donne $F'_u = \frac{\partial^2 \boldsymbol{M}}{\partial u^2}.\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial v} + \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial u}.\frac{\partial^2 \boldsymbol{M}}{\partial u \partial v} = A + \frac{E'_v}{2}$, on obtient alors $A = F'_u - \frac{E'_v}{2}$.

Prenons $u = \varphi$ et $v = \lambda$, et les valeurs des coefficients dans les équations (18.6) et (18.7) ci-dessus, on obtient les équations des géodésiques du tore :

$$-2Rsin\varphi(a + Rcos\varphi)\frac{d\varphi}{ds}\frac{d\lambda}{ds} + (a + Rcos\varphi)^2\frac{d^2\lambda}{ds^2} = 0$$

$$Rsin\varphi(a + Rcos\varphi)\left(\frac{d\lambda}{ds}\right)^2 + R^2\frac{d^2\varphi}{ds^2} = 0$$

3. On différentie la quantité constante $(a + Rcos\varphi)^2\frac{d\lambda}{ds} = C$, ce qui donne :

$$-2Rsin\varphi(a + Rcos\varphi)\frac{d\varphi}{ds}\frac{d\lambda}{ds} + (a + Rcos\varphi)^2\frac{d^2\lambda}{ds^2} = 0$$

On a vérifié que $(a + Rcos\varphi)^2\frac{d\lambda}{ds} = C$. Au point $M_0(\varphi_0 = 0, \lambda = \lambda_0)$ et soit $Az_e$ l'azimut de départ au point $M_0$, mais $(d\lambda/ds)_{M_0} = sinAz_e$, on obtient alors :

$$(a + Rcos\varphi)^2\frac{d\lambda}{ds} = C = (a + R)sinAz_e$$

On retrouve l'équation de Clairaut avec $C = (a + R)sinAz_e$.

4. Comme $0 < Aze < \frac{\pi}{2}$, alors $C > 0$, on remplace $d\lambda/ds$ par :

$$\frac{d\lambda}{ds} = \frac{C}{(a + Rcos\varphi)^2}$$

ce qui donne la deuxième équation des géodésiques :

$$\frac{d^2\varphi}{ds^2} = -\frac{C^2 sin\varphi}{R(a + Rcos\varphi)^3}$$

5. On multiplie l'équation ci-dessus par $2\frac{d\varphi}{ds}$, on obtient :

$$2\frac{d\varphi}{ds}\frac{d^2\varphi}{ds^2} = \frac{d}{ds}\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 = -\frac{2C^2 sin\varphi}{R(a + Rcos\varphi)^3}\frac{d\varphi}{ds} = -\frac{C^2}{R^2}\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{(a + Rcos\varphi)^2}\right)$$

On passe à l'intégration, on obtient :

$$\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 = -\frac{C^2}{R^2}\frac{1}{(a + Rcos\varphi)^2} + l$$

où $l$ est la constante d'intégration.

# 19 Les Systèmes Géodésiques

**Correction 37.** Les coordonnées tridimensionnelles du point $A$ :

$$\begin{aligned} X &= 5\,102\,603.85\,m \\ Y &= 916\,806.87\,m \\ Z &= 3\,703\,034.99\,m \end{aligned}$$

Les paramètres de l'ellipsoïde de référence sont :

$$\begin{aligned} a &= 6\,378\,137.00\,m \\ e^2 &= 0.006\,694\,380\,022\,9 \end{aligned}$$

1. A partir de $e^2 = \dfrac{a^2-b^2}{a^2} \Longrightarrow b = a\sqrt{1-e^2} = 6\ 356\,752.314\,m$

2. La longitude est donnée par : $tg\lambda = Y/X = 916\,806.87/5\,102\,603.85 = 0.179\,674\,318\,632\,437 \Longrightarrow$ $\boxed{\lambda = 11.317\,66\,gr}$.

Le calcul de $\varphi$ se fait par itération. On calcule $r = \sqrt{X^2+Y^2} = 5\,184\,312.9619\,m$. La première valeur de la latitude géodésique $\varphi_1$ est obtenue par $tg\varphi_1 = \dfrac{Z}{r} = \dfrac{3\,703\,034.99}{5\,184\,312.9619} = 0.719\,271\,539\,513 \Longrightarrow$ $\varphi_1 = 39.695\,988\,67\,gr$.
On calcule $N(\varphi_1)e^2 sin\varphi_1 = 24\,960.3217\,m$, $Z' = Z + N(\varphi_1)e^2 sin\varphi_1 = 3\,727\,995.3117\,m$, $tg\varphi_2 = Z'/r = 0.724\,119\,792\,112 \Longrightarrow \varphi_2 = 39.898\,934\,77\,gr$.
On calcule $N(\varphi_2)e^2 sin\varphi_2 = 25\,071.0753\,m$, $Z' = Z + N(\varphi_2)e^2 sin\varphi_2 = 3\,728\,106.0653\,m$, $tg\varphi_3 = Z'/r = 0.724\,141\,304\,713 \Longrightarrow \varphi_3 = 39.899\,833\,20\,\mathbf{gr}$.
On calcule $N(\varphi_3)e^2 sin\varphi_3 = 25\,071.5651\,m$, $Z' = Z + N(\varphi_3)e^2 sin\varphi_3 = 3\,728\,106.5551\,m$, $tg\varphi_4 = Z'/r = 0.724\,141\,399\,851 \Longrightarrow \varphi_4 = 39.899\,837\,18\,gr$.
On calcule $N(\varphi_4)e^2 sin\varphi_4 = 25\,071.5672\,m$, $Z' = Z + N(\varphi_4)e^2 sin\varphi_4 = 3\,728\,106.5572\,m$, $tg\varphi_5 = Z'/r = 0.724\,141\,400\,259 \Longrightarrow \varphi_5 = 39.899\,837\,19\,gr$.
Au cinquième chiffre après la virgule, $\varphi_4$ et $\varphi_5$ sont égaux, on arrête donc le calcul et $\boxed{\varphi = 39.899\,84\,gr}$.

Le calcul de l'altitude ellipsoïdique est obtenu par $he = \dfrac{r}{cos\varphi} - N(\varphi) = 6\,356\,406.8022 - 6\,355\,493.6218 =$ $\boxed{913.180\,m = he}$.

**Correction 38.**
On donne l'expression scalaire d'une fonction $V(x,y,z)$ par :

$$V(x,y,z) = \frac{ax^2+y^2}{z^2} + \frac{1}{2}\omega^2(x^2+y^2)$$

1. Les composantes du vecteur $\boldsymbol{grad}V$ dans un domaine de $\mathbb{R}^3$ où $z \neq 0$ sont :

$$\boldsymbol{grad}V = \left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial V}{\partial x} = \dfrac{2ax}{z^2} + \omega^2 x \\ \dfrac{\partial V}{\partial y} = \dfrac{2y}{z^2} + \omega^2 y \\ \dfrac{\partial V}{\partial z} = -\dfrac{2(ax^2+y^2)}{z^3} \end{array} \right.$$

**Correction 39.**

Le point $A(\varphi,\lambda)$ sur un ellipsoïde de révolution associé à un référentiel géocentrique donné $\mathcal{R}$. On considère le repère orthonormé local en A $(e_\lambda, e_\varphi, e_n)$ défini dans la base orthonormée $(i,j,k)$ de $\mathcal{R}$ où $e_\lambda$ est tangent au parallèle passant par $A$ et dirigé vers l'Est, $e_\varphi$ tangent à la méridienne, dirigé vers le nord et $e_n$ porté par la normale à l'ellipsoïde dirigé vers le zénith, voir (**Fig. 28**).

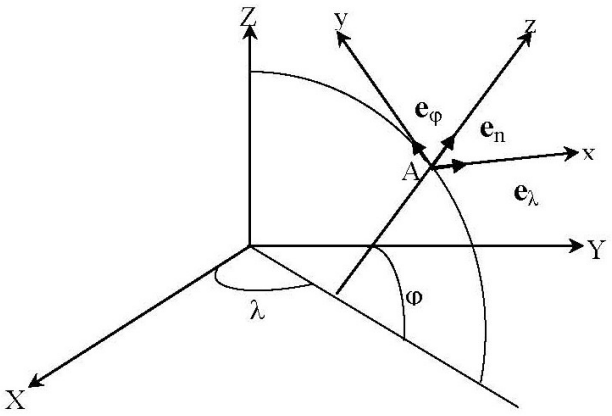



FIGURE 28 – Le référentiel géocentrique $\mathcal{R}$ et le repère local en $A$

1. Les composantes des vecteurs de la base $(e_\lambda, e_\varphi, e_n)$ dans la base $(i,j,k)$ de $\mathcal{R}$ sont comme suit :

$$e_\lambda = \begin{vmatrix} -sin\lambda \\ cos\lambda \\ 0 \end{vmatrix} ; e_\varphi = \begin{vmatrix} -sin\varphi cos\lambda \\ -sin\varphi sin\lambda \\ cos\varphi \end{vmatrix} ; e_n = \begin{vmatrix} cos\varphi cos\lambda \\ cos\varphi sin\lambda \\ sin\varphi \end{vmatrix}$$

Il est facile de vérifier que la base $(e_\lambda, e_\varphi, e_n)$ est une base orthonormée.
2. A partir de la question 1., on a le système suivant :

$$\begin{aligned} e_\lambda &= -sin\lambda i + cos\lambda j \\ e_\varphi &= -sin\varphi cos\lambda i - sin\varphi sin\lambda j + cos\varphi k \\ e_n &= cos\varphi cos\lambda i + cos\varphi sin\lambda j + sin\varphi k \end{aligned}$$

On résoud facilement ce système où les inconnues sont les vecteurs $i, j$ et $k$. On obtient alors :

$$\begin{aligned} i &= -sin\lambda e_\lambda - sin\varphi cos\lambda e_\varphi + cos\varphi cos\lambda e_n \\ j &= cos\lambda e_\lambda - sin\varphi sin\lambda e_\varphi + cos\varphi sin\lambda e_n \\ k &= cos\varphi e_\varphi + sin\varphi e_n \end{aligned}$$

qu'on peut écrire sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} i \\ j \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -sin\lambda & -sin\varphi cos\lambda & cos\varphi cos\lambda \\ cos\lambda & -sin\varphi sin\lambda & cos\varphi sin\lambda \\ 0 & cos\varphi & sin\varphi \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} e_\lambda \\ e_\varphi \\ e_n \end{pmatrix} = P. \begin{pmatrix} e_\lambda \\ e_\varphi \\ e_n \end{pmatrix}$$

avec $P$ la matrice :

$$P = \begin{pmatrix} -sin\lambda & -sin\varphi cos\lambda & cos\varphi cos\lambda \\ cos\lambda & -sin\varphi sin\lambda & cos\varphi sin\lambda \\ 0 & cos\varphi & sin\varphi \end{pmatrix}$$

La matrice $P$ est une matrice de passage d'une base orthonormée à une autre base orthonormée, dans ce cas la matrice $P$ est dite orthogonale soit $P^{-1} = P^T$. Je laisse au lecteur de vérifier cette propriété dans notre cas. Si $H$ est un vecteur dans la base de $\mathcal{R}$ et $h$ dans le repère local avec la base $(e_\lambda, e_\varphi, e_n)$, on a alors la relation $h = P.H$ liant les composantes des vecteurs $H$ et $h$.

3. A partir de 1., on obtient les différentielles de la base $(e_\lambda, e_\varphi, e_n)$ :

$$\begin{aligned} de_\lambda &= -cos\lambda d\lambda i - sin\lambda d\lambda j \\ de_\varphi &= -(cos\varphi cos\lambda d\varphi - sin\varphi sin\lambda d\lambda)i - (cos\varphi sin\lambda d\varphi + sin\varphi cos\lambda d\lambda)j - sin\varphi d\varphi k \\ de_n &= -(sin\varphi cos\lambda d\varphi + cos\varphi sin\lambda d\lambda)i - (sin\varphi sin\lambda d\varphi - cos\varphi cos\lambda d\lambda)j + cos\varphi d\varphi k \end{aligned}$$

Sous forme matricielle, on obtient :

$$\begin{pmatrix} de_\lambda \\ de_\varphi \\ de_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -cos\lambda d\lambda & -sin\lambda d\lambda & 0 \\ -(cos\varphi cos\lambda d\varphi - sin\varphi sin\lambda d\lambda) & -(cos\varphi sin\lambda d\varphi + sin\varphi cos\lambda d\lambda) & -sin\varphi d\varphi \\ -(sin\varphi cos\lambda d\varphi + cos\varphi sin\lambda d\lambda) & -(sin\varphi sin\lambda d\varphi - cos\varphi cos\lambda d\lambda) & cos\varphi d\varphi \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} i \\ j \\ k \end{pmatrix}$$

ou encore :

$$\begin{pmatrix} de_\lambda \\ de_\varphi \\ de_n \end{pmatrix} = M . \begin{pmatrix} i \\ j \\ k \end{pmatrix}$$

$M$ la matrice $3 \times 3$ ci-dessus.

4. En adoptant une écriture matricielle, on obtient :

$$\begin{pmatrix} de_\lambda \\ de_\varphi \\ de_n \end{pmatrix} = M . \begin{pmatrix} i \\ j \\ k \end{pmatrix} = M.P. \begin{pmatrix} e_\lambda \\ e_\varphi \\ e_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -cos\lambda d\lambda & -sin\lambda d\lambda & 0 \\ -(cos\varphi cos\lambda d\varphi - sin\varphi sin\lambda d\lambda) & -(cos\varphi sin\lambda d\varphi + sin\varphi cos\lambda d\lambda) & -sin\varphi d\varphi \\ -(sin\varphi cos\lambda d\varphi + cos\varphi sin\lambda d\lambda) & -(sin\varphi sin\lambda d\varphi - cos\varphi cos\lambda d\lambda) & cos\varphi d\varphi \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -sin\lambda & -sin\varphi cos\lambda & cos\varphi cos\lambda \\ cos\lambda & -sin\varphi sin\lambda & cos\varphi sin\lambda \\ 0 & cos\varphi & sin\varphi \end{pmatrix}$$

On arrive à :

$$\begin{pmatrix} de_\lambda \\ de_\varphi \\ de_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & sin\varphi d\lambda & -cos\varphi d\lambda \\ -sin\varphi d\lambda & 0 & -d\varphi \\ cos\varphi d\lambda & d\varphi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_\lambda \\ e_\varphi \\ e_n \end{pmatrix}$$

**Correction 40.** On considère les notations du précédent problème. Soit un point $M$. On pose :

$$\Delta\mathbf{X} = (X_M - X_A, Y_M - Y_A, Z_M - Z_A)^T, \ \Delta\mathbf{x} = (x_M, y_M, z_M)^T$$

où $\Delta\mathbf{X}$ et $\Delta\mathbf{x}$ sont respectivement les composantes du vecteur $AM$ dans les repère $\mathcal{R}$ et le repère local en $A$.
1. Utilisant les éléments de la question 2. du problème précédent, on a la relation :

$$\Delta\mathbf{x} = P.\Delta\mathbf{X} \Longrightarrow \Delta\mathbf{X} = P^{-1}.\Delta\mathbf{x} \Longrightarrow J = P^{-1} = P^T \Longrightarrow J^T = P = J^{-1}$$

Donc $J$ est une matrice orthogonale.
2. On suppose maintenant que $\mathcal{R}$ est le repère GPS et que le passage du repère $\mathcal{R}$ vers le repère terrestre est donné par le modèle dit à 7 paramètres :

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix} = F(X) = \begin{pmatrix} Tx \\ Ty \\ Tz \end{pmatrix} + (1+m).R. \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} Tx \\ Ty \\ Tz \end{pmatrix} + (1+m). \begin{pmatrix} 1 & rz & -ry \\ -rz & 1 & rx \\ ry & -rx & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

On note : $\delta\mathbf{X} = F(\Delta\mathbf{X}) - \Delta\mathbf{X} = \Delta\mathbf{X}' - \Delta\mathbf{X}$, représente les écarts des composantes du vecteur $MA$ dans les repères GPS et terrestre. On a :

$$\delta\mathbf{X} = F(\Delta\mathbf{X}) - \Delta\mathbf{X} = \Delta\mathbf{X}' - \Delta\mathbf{X} = (1+m)R\Delta\mathbf{X} - \Delta\mathbf{X} = ((R-I)+mR)\Delta\mathbf{X}$$

or la matrice de rotation $R$ s'écrit :

$$R = \begin{pmatrix} 1 & rz & -ry \\ -rz & 1 & rx \\ ry & -rx & 1 \end{pmatrix} = I + \begin{pmatrix} 0 & rz & -ry \\ -rz & 0 & rx \\ ry & -rx & 0 \end{pmatrix} = I + \delta R, \quad \delta R = \begin{pmatrix} 0 & rz & -ry \\ -rz & 0 & rx \\ ry & -rx & 0 \end{pmatrix}$$

D'où :

$$\delta\mathbf{X} = ((R-I) + m(I+\delta R)).\Delta\mathbf{X} = m\Delta\mathbf{X} + (R-I)\Delta\mathbf{X} + m\delta R\Delta\mathbf{X}$$

En gardant les termes du premier ordre, on obtient :

$$\delta\mathbf{X} \cong m\Delta\mathbf{X} + (R-I)\Delta\mathbf{X}$$

3. Soit $\omega = (rx, ry, rz)^T$, on pose $\Delta\mathbf{X} = (a,b,c)^T$. On détaille le terme $(R-I)\Delta\mathbf{X}$ :

$$(R-I)\Delta\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0 & rz & -ry \\ -rz & 0 & rx \\ ry & -rx & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} br_z - cr_y \\ cr_x - ar_z \\ ar_y - br_x \end{pmatrix}$$

Posons $w = \Delta X \wedge \omega$, on obtient que $w = (br_z - cr_y, cr_x - ar_z, ar_y - br_x)^T$, par suite $\delta\mathbf{X} \cong m\Delta\mathbf{X} + w$. On passe à la norme, sachant que le vecteur $w$ est perpendiculaire au vecteur $\Delta\mathbf{X}$, d'où :

$$||\delta\mathbf{X}||^2 = m^2||\Delta\mathbf{X}||^2 + ||w||^2 = m^2||\Delta\mathbf{X}||^2 + ||\omega||^2.||\Delta\mathbf{X}||^2.sin^2\theta = (m^2 + ||\omega||^2 sin^2\theta)||\Delta\mathbf{X}||^2$$
$$\Longrightarrow ||\delta\mathbf{X}|| = (m^2 + ||\omega||^2 sin^2\theta)^{1/2}||\Delta\mathbf{X}||$$

où $\theta$ est l'angle entre les vecteurs $\omega$ et $\Delta\mathbf{X}$.

4. Comme $-1 \leq sin\theta \leq 1$, on déduit :

$$|m|.||\Delta\mathbf{X}|| \leq ||\delta\mathbf{x}|| \leq (m^2 + \omega^2)^{\frac{1}{2}}||\Delta\mathbf{X}||$$

5. En utilisant la relation liant $\Delta\mathbf{X}$ et $\Delta\mathbf{x}$ soit $\Delta\mathbf{X} = J.\Delta\mathbf{x}$ ; la relation $\delta\mathbf{X} = m\Delta\mathbf{X} + (R-I)\Delta\mathbf{X}$ devient :

$$J.\delta\mathbf{x} = mJ\Delta\mathbf{x} + (R-I)J\Delta\mathbf{x} \Longrightarrow \delta\mathbf{x} = m\Delta\mathbf{x} + J^T(R-I)J\Delta\mathbf{x}$$

car $J^{-1} = J^T$.

**Correction 41.**

On définit dans $\mathbb{R}^3$ un point $M$ par ses coordonnées ellipsoïdiques de Jacobi $(\phi, \lambda, u)$ comme suit :

$$M \begin{cases} x = \sqrt{u^2+\epsilon^2}.cos\phi cos\lambda \\ y = \sqrt{u^2+\epsilon^2}.cos\phi sin\lambda \\ z = u.sin\phi \end{cases}$$

avec : $\epsilon^2 = \sqrt{a^2-b^2}$, $\phi \in [-\pi/2, \pi/2]$, $\lambda \in [0, 2\pi]$ et $u \in ]0, +\infty[$, $a, b$ deux constantes réelles telles que $a > b > 0$.

1. Eliminant $\phi$ et $\lambda$, on obtient l'équation :

$$\frac{x^2+y^2}{u^2+\epsilon^2}+\frac{z^2}{u^2}=1$$

Fixant le paramètre $u$, c'est l'équation d'un ellipsoïde de révolution avec $a'=\sqrt{u^2+\epsilon^2}$ le demi-grand axe et $b'=u$ le demi-petit axe.
2. On calcule les différentielles $dx, dy$ et $dz$ en fonction de $d\phi, d\lambda$ et $du$. On obtient :

$$dx=-\sqrt{u^2+\epsilon^2}sin\phi cos\lambda.d\phi-\sqrt{u^2+\epsilon^2}cos\phi sin\lambda d\lambda+\frac{u}{\sqrt{u^2+\epsilon^2}}cos\phi cos\lambda du$$
$$dy=-\sqrt{u^2+\epsilon^2}sin\phi sin\lambda.d\phi+\sqrt{u^2+\epsilon^2}cos\phi cos\lambda d\lambda+\frac{u}{\sqrt{u^2+\epsilon^2}}cos\phi sin\lambda du$$
$$dz=ucos\phi d\phi+sin\phi du$$

On calcule maintenant $dx^2, dy^2$ et $dz^2$ :

$$dx^2=(u^2+\epsilon^2)\left[sin^2\phi cos^2\lambda.d\phi^2+cos^2\phi sin^2\lambda d\lambda^2\right]+\frac{u^2}{u^2+\epsilon^2}cos^2\phi cos^2\lambda du^2+$$
$$+2\left((u^2+\epsilon^2)cos\phi sin\phi cos\lambda sin\lambda d\phi d\lambda-ucos\phi sin\phi cos^2\lambda d\phi du-ucos^2\phi cos\lambda sin\lambda d\lambda du\right)$$
$$dy^2=(u^2+\epsilon^2)\left[sin^2\phi sin^2\lambda.d\phi^2+cos^2\phi cos^2\lambda d\lambda^2\right]+\frac{u^2}{u^2+\epsilon^2}cos^2\phi sin^2\lambda du^2+$$
$$+2\left(-(u^2+\epsilon^2)cos\phi sin\phi cos\lambda sin\lambda d\phi d\lambda-ucos\phi sin\phi sin^2\lambda d\phi du+ucos^2\phi cos\lambda sin\lambda d\lambda du\right)$$
$$dz^2=u^2cos^2\phi d\phi^2+sin^2\phi du^2+2ucos\phi sin\phi d\phi du$$

On écrit maintenant $ds^2=dx^2+dy^2+dz^2$, on obtient :

$$ds^2=(u^2+\epsilon^2)(sin^2\phi cos^2\lambda+sin^2\phi sin^2\lambda).d\phi^2+u^2cos^2\phi d\phi^2+$$
$$+(u^2+\epsilon^2)(cos^2\phi sin^2\lambda+cos^2\phi cos^2\lambda).d\lambda^2+$$
$$+\frac{u^2}{u^2+\epsilon^2}\left(cos^2\phi cos^2\lambda+cos^2\phi sin^2\lambda\right).du^2+sin^2\phi du^2\Longrightarrow$$
$$ds^2=(u^2+\epsilon^2)sin^2\phi d\phi^2+u^2cos^2\phi d\phi^2+(u^2+\epsilon^2)cos^2\phi d\lambda^2+$$
$$+\frac{u^2cos^2\phi}{u^2+\epsilon^2}.du^2+sin^2\phi.du^2\Longrightarrow$$

$$\boxed{ds^2=(u^2+\epsilon^2sin^2\phi).d\phi^2+(u^2+\epsilon^2)cos^2\phi.d\lambda^2+\frac{u^2+\epsilon^2sin^2\phi}{u^2+\epsilon^2}.du^2}$$

Il est facile d'exprimer $ds^2$ sous la forme de :

$$ds^2=(d\phi,d\lambda,du).G.\begin{pmatrix}d\phi\\d\lambda\\du\end{pmatrix}$$

avec $G$ donnée par :

$$G=(g_{ij})=\begin{pmatrix}u^2+\epsilon^2sin^2\phi & 0 & 0\\ 0 & (u^2+\epsilon^2)cos^2\phi & 0\\ 0 & 0 & \frac{u^2+\epsilon^2sin^2\phi}{u^2+\epsilon^2}\end{pmatrix}$$

$G$ est une matrice diagonale, définie positive avec $\phi\in]-\pi/2,\pi/2[$.
3. D'après l'énoncé, on a les données suivantes :
- $g=Det(G)=(u^2+\epsilon^2sin^2\phi)^2cos^2\phi\Longrightarrow\sqrt{g}=(u^2+\epsilon^2sin^2\phi)cos\phi$,

- $g_{11} = u^2 + \epsilon^2 sin^2\phi$,
- $g_{22} = (u^2 + \epsilon^2)cos^2\phi$,
- $g_{33} = \dfrac{u^2 + \epsilon^2 sin^2\phi}{u^2 + \epsilon^2}$.

Alors l'expression du laplacien d'une fonction scalaire $V$ en coordonnées de Jacobi est exprimée par :

$$\Delta V = \frac{1}{(u^2+\epsilon^2 sin^2\phi)cos\phi}\left\{\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\frac{(u^2+\epsilon^2 sin^2\phi)cos\phi}{u^2+\epsilon^2 sin^2\phi}.\frac{\partial V}{\partial\phi}\right)+\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{(u^2+\epsilon^2 sin^2\phi)cos\phi}{(u^2+\epsilon^2)cos^2\phi}.\frac{\partial V}{\partial\lambda}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{(u^2+\epsilon^2 sin^2\phi)cos\phi}{u^2+\epsilon^2 sin^2\phi}.(u^2+\epsilon^2)\frac{\partial V}{\partial u}\right)\right\} \Longrightarrow$$
$$\Delta V = \frac{1}{(u^2+\epsilon^2 sin^2\phi)cos\phi}\left\{\frac{\partial}{\partial\phi}\left(cos\phi.\frac{\partial V}{\partial\phi}\right)+\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{u^2+\epsilon^2 sin^2\phi}{(u^2+\epsilon^2)cos\phi}.\frac{\partial V}{\partial\lambda}\right)+\frac{\partial}{\partial u}\left((u^2+\epsilon^2)cos\phi\frac{\partial V}{\partial u}\right)\right\} \Longrightarrow$$
$$\Delta V = \frac{1}{(u^2+\epsilon^2 sin^2\phi)cos\phi}\left\{-sin\phi\frac{\partial V}{\partial\phi}+cos\phi\frac{\partial^2 V}{\partial\phi^2}+\frac{u^2+\epsilon^2 sin^2\phi}{(u^2+\epsilon^2)cos\phi}.\frac{\partial^2 V}{\partial\lambda^2}+2ucos\phi\frac{\partial V}{\partial u}+(u^2+\epsilon^2)cos\phi\frac{\partial^2 V}{\partial u^2}\right\}$$

4. Calculer $\Delta V$ sachant que $V$ est donnée par :

$$V(\phi,u) = \frac{GM}{\epsilon}Arctg\frac{\epsilon}{u}+\frac{1}{3}a^2\omega^2\frac{q}{q_0}\left(1-\frac{3}{2}cos^2\phi\right)+\frac{1}{2}\omega^2(u^2+\epsilon^2)cos^2\phi$$

$V = V(\phi,u)$ ne dépend pas de $\lambda$, donc $\partial^2 V/\partial\lambda^2 = 0$. On va calculer $dq/du$ et $d^2q/du^2$ et $\partial V/\partial u$, $\partial^2 V/\partial u^2$, $\partial V/\partial\phi$ et $\partial^2 V/\partial\phi^2$. On rappelle que $(Arctgx)'_x = 1/(1+x^2)$. D'où :

$$q = q(u) = \frac{1}{2}\left[\left(1+3\frac{u^2}{\epsilon^2}\right)Arctg\frac{\epsilon}{u}-3\frac{u}{\epsilon}\right] \Rightarrow \frac{dq}{du} = \frac{1}{2}\left[\frac{6u}{\epsilon^2}.Arctg\frac{\epsilon}{u}+\left(1+3\frac{u^2}{\epsilon^2}\right).\frac{1}{1+\frac{\epsilon^2}{u^2}}.\frac{-\epsilon}{u^2}-\frac{3}{\epsilon}\right]$$
$$\frac{dq}{du} = \frac{1}{2}\left[\frac{6u}{\epsilon^2}.Arctg\frac{\epsilon}{u}-\left(1+3\frac{u^2}{\epsilon^2}\right).\frac{\epsilon}{u^2+\epsilon^2}-\frac{3}{\epsilon}\right] = \frac{1}{2\epsilon}\left[\frac{6u}{\epsilon}Arctg\frac{\epsilon}{u}-\frac{3u^2+\epsilon^2}{u^2+\epsilon^2}-3\right]$$
$$\frac{d^2q}{du^2} = \frac{1}{\epsilon}\left[\frac{3}{\epsilon}Arctg\frac{\epsilon}{u}-\frac{3u^3+5u\epsilon^2}{(u^2+\epsilon^2)^2}\right]$$
$$\frac{\partial V}{\partial\phi} = \omega^2\left(a^2\frac{q}{q_0}-(u^2+\epsilon^2)\right).cos\phi sin\phi, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial\phi^2} = \omega^2\left(a^2\frac{q}{q_0}-(u^2+\epsilon^2)\right).cos2\phi$$
$$\frac{\partial V}{\partial u} = -\frac{GM}{u^2+\epsilon^2}+\frac{1}{3}\frac{a^2\omega^2}{q_0}\left(1-\frac{3}{2}cos^2\phi\right)\frac{dq}{du}+u\omega^2cos^2\phi \Longrightarrow$$
$$\frac{\partial^2 V}{\partial u^2} = 2u.\frac{GM}{(u^2+\epsilon^2)^2}+\frac{1}{3}\frac{a^2\omega^2}{q_0}\left(1-\frac{3}{2}cos^2\phi\right)\frac{d^2q}{du^2}+\omega^2cos^2\phi$$

Finalement, on obtient $\Delta V$ comme suit :

$$\Delta V = \frac{1}{(u^2+\epsilon^2 sin^2\phi)cos\phi}\left\{-\omega^2\left(\frac{a^2q}{q_0}-(u^2+\epsilon^2)\right)cos\phi sin^2\phi+\omega^2\left(\frac{a^2}{q_0}-(u^2+\epsilon^2)\right)cos\phi cos2\phi+\right.$$
$$2ucos\phi\left[-\frac{GM}{u^3+\epsilon^2}+\frac{a^2\omega^2}{3q_0}\left(1-\frac{3}{2}cos^2\phi\right)\frac{dq}{du}+u\omega^2cos^2\phi\right]+$$
$$\left.(u^2+\epsilon^2)cos\phi\left[\frac{2uGM}{(u^2+\epsilon^2)^2}+\frac{a^2\omega^2}{3q_0}\left(1-\frac{3}{2}cos^2\phi\right)\frac{d^2q}{du^2}+\omega^2cos^2\phi\right]\right\}$$

Après des premières simplifications, on obtient :

$$\Delta V = \frac{\omega^2}{(u^2+\epsilon^2 sin^2\phi)}\left\{-\left(\frac{a^2 q}{q_0}-(u^2+\epsilon^2)\right)sin^2\phi+\left(\frac{a^2}{q_0}-(u^2+\epsilon^2)\right)(1-2sin^2\phi)+\right.$$
$$\frac{2ua^2}{3q_0}\left(1-\frac{3}{2}cos^2\phi\right)\frac{dq}{du}+2u^2\omega^2cos^2\phi+$$
$$\left.\frac{a^2}{3q_0}(u^2+\epsilon^2)\left(1-\frac{3}{2}cos^2\phi\right)\frac{d^2q}{du^2}+(u^2+\epsilon^2)cos^2\phi\right\}$$

On continue :

$$\Delta V = \frac{\omega^2}{(u^2+\epsilon^2 sin^2\phi)}\left\{2(u^2+\epsilon^2 sin^2\phi)+\frac{a^2}{3q_0}\left(1-\frac{3}{2}cos^2\phi\right)\left[(u^2+\epsilon^2)\frac{d^2q}{du^2}+2u\frac{dq}{du}-6q\right]\right\}$$

Enfin, en calculant les termes entre crochets [, ], on trouve 0, d'où la valeur de $\Delta V$ :

$$\Delta V = 2\omega^2$$

**Correction 42.** Avec les notations usuelles, un potentiel est donné avec les constantes $(GM, a, J_2, \omega)$ de GRS80 par :

$$W(r,\theta,\lambda) = \frac{GM}{r}\left(1-J_2\frac{a^2}{r^2}P_2(cos\theta)\right)+\frac{\omega^2}{2}r^2sin^2\theta$$

où $(r,\theta,\lambda)$ sont les coordonnées sphériques du point de calcul et :

- $a = 6378\,137.00\,m$ , $b = 6356\,752.31\,m$ ;
- $GM = 3\,986\,005\times10^8\,m^3s^{-2}$ ;
- $\omega = 7\,292\,115\times10^{-11}rad.s^{-1}$ ;
- $J_2 = 108\,263\times10^{-8}$;
- $f = (a-b)/a = 0.0033\,5281\,1330$ ;
- $P_2(cos\theta) = \frac{1}{2}(3cos^2\theta-1)$.

1a. Calcul du potentiel $W_{PN}$ au pôle Nord : $\theta = 0\,rd$ , $r = b$, on obtient :

$$W_{PN} = \frac{GM}{b}\left(1-\frac{a^2}{b^2}J_2\right) = \frac{3\,986\,005\times10^8}{6\,356\,752.31}\left(1-\left(\frac{6\,378\,137.00}{6\,356\,752.31}\right)^2.108\,263\times10^{-8}\right) = 62\,636\,710.6002\,m^2/s^2$$

1b. Calcul du potentiel $W_{Eq}$ à l'équateur : $\theta = \pi/2\,rd$ , $r = a$, on obtient :

$$W_{Eq} = \frac{GM}{a}\left(1+\frac{J_2}{2}\right)+\frac{\omega^2a^2}{2} \Longrightarrow$$

$$W_{Eq} = \frac{3\,986\,005\times10^8}{6\,378\,137.00}\left(1-0.5\times108\,263\times10^{-8}\right)+0.5\times(7\,292\,115\times10^{-11}\times6\,378\,137.00)^2 = 62\,569\,146.4044\,m^2$$

1c. Calcul du potentiel $W_A$ au point $A$ avec : $\theta_A = 34°$, $r$ est donné par la formule $r = a(1-f\,cos\theta_A)$, $f = (a-b)/a$ l'aplatissement. On obtient :

$$W_A = \frac{GM}{r}\left(1-J_2\frac{a^2}{2r^2}(3cos^2\theta_A-1)\right)+\frac{\omega^2}{2}r^2sin^2\theta_A \Longrightarrow$$

$$W_A = \frac{GM}{a(1-f\,cos\theta_A)}\left(1-J_2\frac{(3cos^2\theta_A-1)}{2(1-f\,cos\theta_A)^2}\right)+\frac{\omega^2}{2}a^2(1-f\,cos\theta_A)^2sin^2\theta_A$$

$$3cos^2\theta_A-1 = 1.0619\,0989\,0124,\quad 1-f\,cos\theta_A = 0.9972\,2039\,3438,\quad r = a(1-f\,cos\theta_A) = 6\,360\,408.2885\,m$$

$$W_A = 62\,632\,786.4827+33\,633.3645 = 62\,666\,419.8472\,m^2/s^2$$

2. Les variations de $W$ entre les 3 points sont comme suit :

$$W_{PN}-W_A = 62\,636\,710.6002-62\,666\,419.8472 = -29\,709.2470\,m^2/s^2$$

$$W_{PN} - W_{Eq} = 62\,636\,710.6002 - 62\,569\,146.4044 = 67\,564.1958\,m^2/s^2$$
$$W_A - W_{Eq} = 62\,666\,419.8472 - 62\,569\,146.4044 = 97\,273.4428\,m^2/s^2$$

3. A partir des formules :

$$X = rsin\theta cos\lambda, Y = rsin\theta sin\lambda, Z = rcos\theta$$

on obtient :

$$r = \sqrt{X^2+Y^2+Z^2}, rsin\theta = \sqrt{X^2+Y^2}, cos\theta = \frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}$$

Par suite, l'expression du potentiel $W$ en fonction des coordonnées cartésiennes $(X,Y,Z)$ est :

$$W = \frac{GM}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}\left(1 - \frac{a^2J_2}{2(X^2+Y^2+Z^2)^2}(2Z^2-X^2-Y^2)\right) + \frac{\omega^2}{2}(X^2+Y^2)$$

**Correction 43.**

On considère deux points $A$ et $B$ de coordonnées géodésiques dans le système géodésique $WGS84$ du GPS :

$$A : (\varphi'_A = 36.6306\,gr; \lambda'_A = 10.7896\,gr; h'_A = 137.50\,m)$$
$$B : (\varphi'_B = 36.6317\,gr; \lambda'_B = 10.7915\,gr; h'_B = 171.33\,m) \tag{19.1}$$

Les paramètres de l'ellipsoïde $WGS84$ sont : $a = 6\,378\,137.00m, e^2 = 0.00669438$.

1. Les coordonnées tridimensionnelles $(X',Y',Z')_A, (X',Y',Z')_B$ des points $A$ et $B$ dans le système géodésique $WGS84$ sont obtenues en utilisant les formules suivantes :

$$\begin{cases} X = (N+h)cos\varphi cos\lambda \\ Y = (N+h)cos\varphi sin\lambda \\ Z = (N(1-e^2)+h)sin\varphi \end{cases}, \quad N = \frac{a}{\sqrt{1-e^2sin^2\varphi}}$$

D'où :

$$A = \begin{cases} X'_A = 5\,279\,802.19\,m \\ Y'_A = 903\,502.27\,m \\ Z'_A = 3\,451\,013.74\,m \end{cases}, \quad B = \begin{cases} X'_B = 5\,279\,744.31\,m \\ Y'_B = 903\,654.56\,m \\ Z'_B = 3\,451\,124.27\,m \end{cases}$$

2. Calculons les coefficients suivants :

$$\Delta X' = X'_B - X'_A = -57.88\,m$$
$$\Delta Y' = Y'_B - Y'_A = +152.29\,m$$
$$\Delta Z' = Z'_B - Z'_A = +110.53\,m$$

L'azimut géodésique de la direction $AB$ est donné par la formule :

$$tg(Az'_g) = \frac{-\Delta X' sin\lambda'_A + \Delta Y' cos\lambda'_A}{\Delta Z' cos\varphi'_A - sin\varphi'_A(\Delta X' cos\lambda'_A + \Delta Y' sin\lambda'_A)} = \frac{159.870\,7736}{109.799\,2737} = 1.456\,02761 \Longrightarrow$$
$$Az'_g = 61.687\,46\,gr$$

3. Le passage du système géodésique GPS au système géodésique terrestre est donné par la formule :

$$\mathbf{X} = \mathbf{T} + \mathbf{X'}$$

avec $\mathbf{T} = (+263.3\,m, -14.4\,m, -434.1\,m)^T$. Les coordonnées géodésiques tridimensionnelles $(X,Y,Z)_A$ et $(X,Y,Z)_B$ de $A$ et $B$ dans le système géodésique terrestre sont :

$$A = \begin{cases} X_A = +263.3 + 5\,279\,802.19 = 5\,280\,065.49\,m \\ Y_A = -14.4 + 903\,502.27 = 903\,487.87\,m \\ Z_A = -434.1 + 3\,451\,013.74 = 3\,450\,579.64\,m \end{cases}, \quad B = \begin{cases} X_B = +263.3 + 5\,279\,744.31 = 5\,280\,007.61\,m \\ Y_B = -14.4 + 903\,654.56 = 903\,640.16\,m \\ Z_B = -434.1 + 3\,451\,124.27 = 3\,450\,690.17\,m \end{cases}$$

4. On commence par calculer la longitude $\lambda$ du point $A$ :

$$tg\lambda = \frac{Y_A}{X_A} = \frac{903\,487.87}{5\,280\,065.49} = 0.1711\,1300\,4509 \Longrightarrow \lambda = 10.7889\,0\,gr$$

Calcul de la latitude géodésique $\varphi$ du point $A$ : Calculons $r = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = 5\,356\,807.063\,m$. On opère par itération :

- $\varphi_0$ : $tg\varphi_0 = \dfrac{Z}{r} = \dfrac{3\,450\,579.64}{5\,356\,807.063} = 0.6441\,4857\,5713 \Longrightarrow \varphi_0 = 36.4306\,1337\,gr$,
- $\varphi_1$ : $tg\varphi_1 = \dfrac{Z + N(\varphi_0)e^2 sin\varphi_0}{r} \Longrightarrow \varphi_1 = 36.6277\,9\,gr$,
- $\varphi_2$ : $tg\varphi_2 = \dfrac{Z + N(\varphi_1)e^2 sin\varphi_1}{r} \Longrightarrow \varphi_2 = 36.6287\,4\,gr$,
- $\varphi_3$ : $tg\varphi_3 = \dfrac{Z + N(\varphi_2)e^2 sin\varphi_2}{r} \Longrightarrow \varphi_3 = 36.6287\,4\,gr \Longrightarrow \varphi = 36.6287\,4\,gr$.

5a. On obtient $\Delta X = X_B - X_A = -57.88\,m; \Delta Y = Y_B - Y_A = +152.29\,m; \Delta Z = Z_B - Z_A = +110.53\,m$.
5b. On obtient $tgAz_g$ :

$$tgAz_g = \frac{-\Delta X sin\lambda + \Delta Y cos\lambda}{\Delta Z cos\varphi - sin\varphi(\Delta X cos\lambda + \Delta Y sin\lambda)} = \frac{159.8704288}{109.8012\,187} \Longrightarrow Az_g = 61.6868\,7\,gr$$

6. D'où $Az'_g - Az_g = 61.6874\,6 - 61.6868\,7 = 0.0005\,9\,gr = 5.9\,dmgr$. A $5.8\,dmgr$ près, on a obtenu $Az'_g \approx Az_g$, c'est-à-dire que l'effet d'une translation tridimensionnelle entre deux systèmes géodésiques n'a pas d'effets sur les azimuts géodésiques ou encore les azimuts géodésiques sont conservés.

# 20 Réductions des Distances

**Correction 44.** On a mesuré une distance suivant la pente $D = 20130.858\,m$ entre deux points $A$ et $B$ avec $H_A = 235.07\,m$, $H_B = 507.75\,m$, on prendra comme rayon terrestre $R = 6378\,km$.
1. Calcul de la distance suivant l'ellipsoïde :
1a. En utilisant les différentes corrections :
- Correction de courbure $C_1$ : $C_1 = D_P - D = -\dfrac{D^3}{24 \times 16R^2} = -\dfrac{20.130858^3}{24 \times 16 \times 6378^2}\,km = -0.52\,mm$.

D'où $D_P = D + C_1 = 20\,130.858 - 0.00052 = 20\,130.857\,48\,m$

- Réduction à l'horizontale à l'altitude moyenne $H_m$ : $C_2 = D_H - D_P$, $H_m = (H_A + H_B)/2 = 371.41\,m, \Delta H = H_B - H_A = 272.68\,m$ et $C_2 = D_H - D_P = -\dfrac{\Delta H^2}{2D_P} = -1.846\,78\,m \Rightarrow D_H = 20\,129.010\,70\,m$.

- Réduction à la distance corde $D_0$ ou au niveau zero :
$C_3 = D_0 - D_H = -D_H \dfrac{H_m}{R + H_m} = -20\,129.010\,70 \times \dfrac{371.41}{6\,378\,000.00 + 371.41} = -1.172\,10\,m$, d'où $D_0 = D_H + C_3 = 20\,129.010\,70 - 1.172\,10 = 20\,127.838\,60\,m$.

- Calcul de la distance courbe $D_e$ sur l'ellipsoïde : $D_e = D_0 + C_4$ avec $C_4 = +\dfrac{D_0^3}{24R^2} = +0.008\,35\,m$.

On obtient alors $\boxed{D_e = D_0 + C_4 = 20\,127.847\,m}$.

1b. En utilisant la formule rigoureuse : on applique la formule ci-dessous :

$$D_0 = D_P \sqrt{\frac{1-\dfrac{\Delta H^2}{D_P^2}}{\left(1+\dfrac{H_A}{R}\right)\left(1+\dfrac{H_B}{R}\right)}}$$

Numériquement, on obtient $D_0 = 20\,127.838\,52\,m$. La distance courbe $D_e$ vaut : $D_e = D_0 + C_4 = 20\,127.847\,m$.

2. En prenant la valeur de la formule rigoureuse, la distance réduite $D_r$ au plan de la représentation plane utilisée est : $D_r = m.D_e = 0.999\,850\,371 \times 20\,127.847 = 20\,124.835\,m$.

**Correction 45.**

Entre 2 points $A$ ( $H_A = 128.26\,m$ ) et $B$ ( $H_B = 231.84\,m$), la distance $D_P$ suivant la pente est égale à $15\,498.823\,m$. Soit $D_0$ la distance corde au niveau de la surface de référence. 1. On a $H_A = 128.26\,m$, $H_B = 231.84\,m \Longrightarrow \Delta H = H_B - H_A = 103.580\,m$, la distance mesurée suivant la pente $D = 15\,498.823\,m$. La distance rectiligne suivant la pente est :

$$D_P = D - \frac{D^3}{24 \times 16R^2} = 15\,498.823 - 0.000\,24 = 15\,498.822\,76\,m$$

Utilisant la formule rigoureuse ci-dessus, on obtient numériquement : $D_0 = 15\,498.039\,13\,m$.

2. On va calculer $D_0$ par les corrections :

- Réduction à l'horizontale à l'altitude moyenne $H_m$ : $C_2 = D_H - D_P$, $H_m = (H_A + H_B)/2 = 180.05\,m$, $\Delta H = H_B - H_A = 103.58\,m$ et $C_2 = D_H - D_P = -\dfrac{\Delta H^2}{2D_P} = -0.346\,12\,m \Rightarrow D_H = 15\,497.693\,01\,m$.

- Réduction à la distance corde $D_0$ ou au niveau zero :

$C_3 = D_0 - D_H = -D_H \dfrac{H_m}{R + H_m} = -15\,497.693\,01 \times \dfrac{180.05}{6\,378\,180.05} = -0.437\,49\,m$, d'où $D_0 = D_H + C_3 = 15\,497.693\,01 - 0.437\,49 = 15\,497.255\,52\,m$.

3. La moyenne des deux méthodes donne $D_{0m} = 15\,497.647\,33\,m$. La distance $D_e$ réduite à la surface de référence est obtenue par : $D_e = D_{0m} + \dfrac{D_{0m}^2}{24R^2} = 15\,497.647\,33\,m$.

4. La distance $D_r$ réduite au plan de la représentation vaut : $D_r = 0.999\,648\,744 \times 15\,497.647\,33 = 15\,492.204\,m$.

**Correction 46.**

On a mesuré une distance suivant la pente entre les points $A(H_A = 1\,319.79\,m)$ et $B\,(H_B = 1\,025.34\,m)$ avec $D_P = 16\,483.873\,m$.

1. $\Delta H = H_B - H_A = -294.45\,m$, on obtient par la formule rigoureuse $D_0 = 16\,478.206\,m$. La correction $C_4$ est négligeable, la distance $D_e$ distance réduite à l'ellipsoïde de référence est par suite $D_e = D_0 = 16\,478.206\,m$.

2. La distance $D_r$ réduite à la représentation plane Lambert est : $D_r = \left(1 - \dfrac{14}{100000}\right).D_e = 0.999\,86 \times 16\,478.206 = 16\,475.899\,m$.

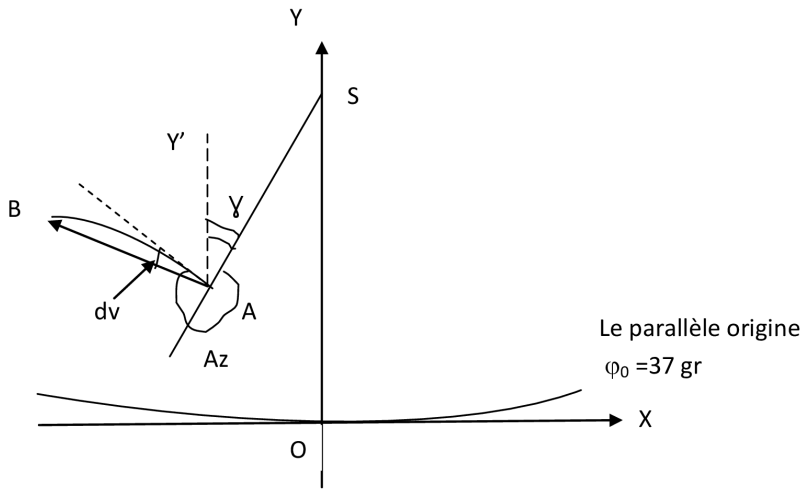



FIGURE 29 – Le Repère Lambert Tunisie Sud

3. En référence de la (**Fig. 29**), on a les éléments suivants :
- l'azimut géodésique $Azg$ est l'angle extérieur $BAS$,
- la convergence des méridiens est l'angle $\gamma = Y'AS$, elle vaut $(\lambda_A - \lambda_0)sin\varphi_0$ avec $\lambda_0$ la longitude du méridien origine de la représentation Lambert Tunisie Sud soit $11\,gr$ à l'Est de Greenwitch et $\varphi_0 = 37\,gr$ la latitude géodésique du parallèle origine de la représentation Lambert Tunisie Sud.
- la ligne de la visée $AB$ est représentée par l'arc $AB$ de concavité dirigée vers le parallèle origine $\varphi_0 = 37\,gr$. La correction à la corde $dv$ au point $A$ est l'angle entre la tangente à l'arc $AB$ cité ci-dessus et la droite $AB$.
- le gisement $G$ de la direction $AB$ est l'angle $Y'AB$ dans le sens indirect.

La formule algébrique du gisement $G$ est donnée par l'expression :

$$G = Azg - \gamma + dv = Azg - (\lambda_A - \lambda_0)sin\varphi_0 + dv$$

4. Numériquement, on obtient $G = 297.5622\,5 - (9.3474\,734 - 11.0000)sin37 - 0.0013\,7 = 298.4681\,5\,gr$

5. Les coordonnées planimétriques $(X_B, Y_B)$ de $B$ sont données par les formules :

$$\begin{cases} X_B = X_A + ABsinG \\ Y_B = Y_A + ABcosG \end{cases} \quad avec\ AB = D_r = 16\,475.899\,m$$

On obtient donc :

$$X_B = 363\,044.79 - 16\,471.13 = 346\,573.66\,m, \quad Y_B = 407\,020.09 - 396.41 = 406\,623.68\,m$$

6. Les formules des coordonnées Lambert Tunisie Sud sont :

$$\begin{cases} X = 500\,000.00\,m + kRsin\Omega = X_0 + kRsin\Omega \\ Y = 300\,000.00\,m + k(R_0 - Rcos\Omega) = Y_0 + k(R_0 - Rcos\Omega), \quad avec : \\ \Omega = \Omega(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)sin\varphi_0,\ R = R(\varphi) = R_0 exp(-(\mathcal{L} - \mathcal{L}_0)sin\varphi_0),\ R_0 = N_0 cotg\varphi_0,\ N_0 = a(1 - e^2 sin^2\varphi_0)^{-1/2} \\ \mathcal{L} = \mathcal{L}(\varphi) = Logtg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) - \frac{e}{2}Log\frac{1 + esin\varphi}{1 - esin\varphi}, \quad \mathcal{L}_0 = \mathcal{L}(\varphi_0) \\ a = 6378\,249.20\,m,\ e^2 = 0.0068\,034\,877,\ k = 0.999\,625\,769. \end{cases}$$

Posons :

$$x' = k.R.sin\Omega, \quad y' = k.(R_0 - Rcos\Omega) \Longrightarrow x' = X - X_0, y' = Y - Y_0$$

Numériquement :

$$x' = X_B - X_0 = -153\,426.34\,m, \quad y' = Y_B - Y_0 = +106\,623.68\,m$$

**Calcul de $\lambda_B$ :** Des formules ci-dessus, on obtient $kRsin\Omega = x', kRcos\Omega = kR_0 - y'$, par suite :

$$tg\Omega = \frac{x'}{kR_0 - y'} \Longrightarrow \lambda = \lambda_0 + \frac{1}{sin\varphi_0} Arctg\left(\frac{x'}{kR_0 - y'}\right), \quad R_0 = N_0 cotg\,\varphi_0 = 9\,719\,928.094\,m$$

Par suite, utilisant les valeurs numériques, on obtient $\lambda = 9.1488\,3802\,gr \Longrightarrow \Omega = (\lambda - \lambda_0)sin\varphi_0 = -1.0163\,3017\,gr$.

**Calcul de $\mathcal{L}(\varphi_B) = \mathcal{L}$ :** De $x' = kRsin\Omega \Longrightarrow \dfrac{x'}{kR_0 sin\Omega} = exp(-(\mathcal{L} - \mathcal{L}_0)sin\varphi_0)$ ce qui donne :

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 - \frac{1}{sin\varphi_0} Log\left(\frac{x'}{kR_0 sin\Omega}\right) \Longrightarrow \text{valeur de } \mathcal{L}$$

$$\mathcal{L}_0 = Logtg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_0}{2}\right) - \frac{e}{2} Log\frac{1 + esin\varphi_0}{1 - esin\varphi_0} = 0.6169\,8141\,3555 - 0.0037\,3782\,6502 = 0.6132\,4358\,7053$$

$$\Longrightarrow \mathcal{L} = \mathcal{L}_0 - \frac{1}{sin\varphi_0} Log\left(\frac{x'}{kR_0 sin\Omega}\right) = 0.6132\,4358\,7053 + 0.0198\,6606\,8407 = 0.6331\,0965\,5460$$

**Calcul de $\varphi_B$ :** On utilise la formule liant $\mathcal{L}$ à $\varphi_B$ ; soit :

$$Logtg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_B}{2}\right) - \frac{e}{2} Log\frac{1 + esin\varphi_B}{1 - esin\varphi_B} = \mathcal{L}$$

Pour faciliter les notations, on ignore l'indice $B$. Le Calcul de $\varphi$ se fait par itérations comme suit :

- calcul 1 : $Logtg\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\varphi_1}{2}\right) = \mathcal{L} = 0.6331\,0965\,5460 \Longrightarrow \varphi_1 = 2Arctg(e^{\mathcal{L}}) - \pi/2 = 37.8543\,5607\,gr$

- calcul 2 : $Logtg\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\varphi_2}{2}\right) = \mathcal{L}_1 = 0.6331\,0965\,5460 + \dfrac{e}{2} Log\dfrac{1 + esin\varphi_1}{1 - esin\varphi_1} = \mathcal{L} + 0.0038\,1395\,9838 =$
$\mathcal{L}_1 = 0.6369\,2361\,5298 \Longrightarrow \varphi_2 = 2Arctg(e^{\mathcal{L}_1}) - \pi/2 = 38.0552\,7138\,gr$

- calcul 3 : $Logtg\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\varphi_3}{2}\right) = \mathcal{L}_2 = 0.6331\,0965\,5460 + \dfrac{e}{2} Log\dfrac{1 + esin\varphi_2}{1 - esin\varphi_2} = \mathcal{L} + 0.0038\,3176\,5332 =$
$\mathcal{L}_2 = 0.6369\,4142\,0792 \Longrightarrow \varphi_3 = 2Arctg(e^{\mathcal{L}_2}) - \pi/2 = 38.0562\,0835\,gr$

- calcul 4 : $Logtg\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\varphi_4}{2}\right) = \mathcal{L}_3 = 0.6331\,0965\,5460 + \dfrac{e}{2} Log\dfrac{1 + esin\varphi_3}{1 - esin\varphi_3} = \mathcal{L} + 0.0038\,3184\,8280 =$
$\mathcal{L}_3 = 0.6369\,4150\,3740 \Longrightarrow \varphi_4 = 2Arctg(e^{\mathcal{L}_3}) - \pi/2 = 38.0562\,1271\,gr$

- calcul 5 : $Logtg\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\varphi_5}{2}\right) = \mathcal{L}_4 = 0.6331\,0965\,5460 + \dfrac{e}{2} Log\dfrac{1 + esin\varphi_4}{1 - esin\varphi_4} = \mathcal{L} + 0.0038\,3184\,8666 =$
$\mathcal{L}_4 = 0.6369\,4150\,4126 \Longrightarrow \varphi_5 = 2Arctg(e^{\mathcal{L}_4}) - \pi/2 = 38.0562\,1273\,gr$. Les angles $\varphi_5$ et $\varphi_4$ ont les mêmes valeurs à 7 chiffres après la virgule, la longitude $\lambda_A$ du point $A$ est donnée à 7 chiffres après la virgule, donc on peut arrêter les itérations en prenant $\varphi_B = \varphi_4 = \varphi_5 = 38.0562\,127\,gr$.

# 21 Les Représentations Planes

## 21.1 Les Représentations Planes

**Correction 47.** Soit $\mathbb{S}^2$ la sphère de rayon $R$. Au point $P(\varphi,\lambda)$ de $\mathbb{S}^2$ on lui fait correspondre le point $p(X,Y)$ du plan $OXY$ par la représentation plane suivante définie par les formules :

$$p(X,Y)\begin{cases} X = R.cos\lambda \\ Y = R.sin\varphi \end{cases}$$

1. Calculons les coordonnées polaires $(\mathcal{R},\Omega)$ du point $P$ :

$$\mathcal{R}^2 = X^2 + Y^2 = R^2(cos^2\lambda + sin^2\varphi) \Longrightarrow \mathcal{R} = f(\varphi,\lambda)$$

$\mathcal{R}$ dépend des 2 paramètres $\varphi,\lambda$, donc la représentation ne peut être une représentation conique, elle est cylindrique car $X = X(\varphi,\lambda)$ et $Y = Y(\varphi,\lambda)$.

2. Soit $dS$ la longueur infinitésimale correspondante sur le plan, donner l'expression de $(dS)^2$ en fonction de $\varphi,\lambda,d\varphi,d\lambda$ et $R$. L'expression $dS^2$ est donnée par :

$$dS^2 = dX^2 + dY^2 = R^2(sin^2\lambda d\lambda^2 + cos^2\varphi d\varphi^2)$$

3. Soit $m$ le module linéaire, $m^2$ est donné par :

$$m^2 = \frac{dS^2}{ds^2}$$

Pour la sphère, les coordonnées de $P$ sont :

$$x = Rcos\varphi cos\lambda, y = Rcos\varphi sin\lambda, z = Rsin\varphi \Longrightarrow ds^2 = R^2d\varphi^2 + R^2cos^2\varphi d\lambda^2$$

Par suite, on obtient :

$$m^2 = \frac{cos^2\varphi d\varphi^2 + sin^2\lambda d\lambda^2}{d\varphi^2 + cos^2\varphi d\lambda^2}$$

4. On obtient :

$$\lambda = cte, \quad m_1^2 = \frac{cos^2\varphi d\varphi^2}{d\varphi^2} = cos^2\varphi \Longrightarrow m_1 = cos\varphi > 0$$

et :

$$\varphi = cte, \quad m_2^2 = \frac{sin^2\lambda d\lambda^2}{cos^2\varphi d\lambda^2} \Longrightarrow m_2 = \frac{sin\lambda}{cos\varphi} > 0$$

5. Cette représentation n'est pas conforme, car le module linéaire dépend de l'azimut de la direction. En effet, au point $P$ sur la sphère, on a la formule $tgAz = \frac{Rcos\varphi d\lambda}{Rd\varphi} = \frac{cos\varphi d\lambda}{d\varphi} \Longrightarrow \frac{d\lambda}{d\varphi} = \frac{tgAz}{cos\varphi}$.
L'expression du carré du module linéaire devient :

$$m^2 = \frac{cos^2\varphi d\varphi^2 + sin^2\lambda d\lambda^2}{d\varphi^2 + cos^2\varphi d\lambda^2} = \frac{cos^2\varphi + sin^2\lambda\left(\frac{d\lambda}{d\varphi}\right)^2}{1 + cos^2\varphi\left(\frac{d\lambda}{d\varphi}\right)^2} = \frac{cos^2\varphi + sin^2\lambda\left(\frac{tgAz}{cos\varphi}\right)^2}{1 + tg^2Az} =$$

$$m^2 = cos^2Az\left(cos^2\varphi + \frac{sin^2\lambda}{cos^2\varphi}.tg^2Az\right) = cos^2Az.cos^2\varphi + \frac{sin^2\lambda}{cos^2\varphi}.sin^2Az$$

On a bien $m = m(Az, \varphi, \lambda)$. L'indicatrice de Tissot est représentée par une ellipse :

$$\frac{u^2}{m_1^2} + \frac{v^2}{m_2^2} = 1$$

quand $m_1 \neq m_2 \Longrightarrow cos^2\varphi \neq sin\lambda$ et un cercle sur la courbe telle que $cos^2\varphi = sin\lambda$.

**Correction 48.** Soit $\mathbb{S}^2$ la sphère de rayon $R$, au point $P(\varphi, \lambda)$ on lui fait correspondre le point $p(X, Y)$ du plan $OXY$ par la représentation plane suivante définie par les formules :

$$p(X,Y) = \begin{cases} X = 2R.tg\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right).sin\lambda \\ Y = -2R.tg\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right).cos\lambda \end{cases}$$

1. L'image du méridien ($\lambda = \lambda_0$ =constante ) est la droite une droite. Si $\lambda_0 = \pi/2$ la droite est $Y = 0$. Si $\lambda_0 \neq \pi/2$ la droite a pour équation $X + Y\,tg\,\lambda_0 = 0$ qui passe par l'origine des axes.

2. L'image d'un parallèle ($\varphi = \varphi_0 =$ constante ) est un cercle ayant l'équation :

$$X^2 + Y^2 = 4R^2.tg^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_0}{2}\right)$$

de rayon $2R$, le centre du cercle est le point origine $(0, 0)$ des axes.

3. Les méridiens et les parallèles de la sphère se coupent perpendiculairement. De même leurs images les droites $Y = \alpha X$ coupent les cercles concentriques sous un angle droit. D'après le lemme de Tissot, les directions principales en un point sont les tangentes au parallèle et au méridien passant par le point.
4. On a $dS^2 = dX^2 + dY^2$, calculons alors $dX, dY$.

$$dX = 2Rtg\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)cos\lambda d\lambda - \frac{Rsin\lambda}{cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)}d\varphi$$

$$dY = 2Rtg\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)sin\lambda d\lambda + \frac{Rcos\lambda}{cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)}d\varphi$$

Par suite

$$dS^2 = dX^2 + dY^2 = 4R^2tg^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)d\lambda^2 + \frac{R^2}{cos^4\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)}d\varphi^2 \Longrightarrow$$

$$dS^2 = \frac{R^2}{cos^4\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)}d\varphi^2 + \frac{4R^2sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)}{cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)}d\lambda^2 = \frac{R^2}{cos^4\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)}\left(d\varphi^2 + 4sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)d\lambda^2\right)$$

$$dS^2 = \frac{R^2}{cos^4\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)}\left(d\varphi^2 + sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)d\lambda^2\right) = \frac{R^2}{cos^4\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)}\left(d\varphi^2 + cos^2\varphi d\lambda^2\right)$$

5. On obtient $m^2 = \dfrac{dS^2}{ds^2}$ mais $ds^2 = R^2d\varphi^2 + R^2cos^2\varphi.d\lambda^2$, d'où :

$$m^2 = \frac{1}{cos^4\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)} \Longrightarrow m = \frac{1}{cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)}$$

6. Le module linéaire $m_1$ le long du méridien ($\lambda = cte$) est $m$, mais qui varie le long du méridien.

7. Le module linéaire $m_2$ le long d'un parallèle ($\varphi = cte$) est $m$ mais reste fixe.
8. En un point $P(\varphi, \lambda)$ le module linéaire $m = m_1 = m_2 = \dfrac{1}{cos^2\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\varphi}{2}\right)}$. Oui la représentation plane est conforme, car le module linéaire dépend du point et non de la direction.

**Correction 49.** Soit $\Sigma$ la sphère de rayon $R$, au point $P(\varphi, \lambda)$ on lui fait correspondre le point $p(X, Y)$ du plan $OXY$ par la représentation plane suivante définie par les formules :

$$p(X,Y) = \begin{cases} X = R.\lambda \\ Y = R.Logtg(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\varphi}{2}) \end{cases}$$

où $Log$ désigne le logarithme népérien.
1. Les images des méridiens ($\lambda =$ constante) sont des droites parallèles à l'axe des $Y$ et les images des parallèles ($\varphi =$ constante) sont des droites parallèles à l'axe des $X$.

2. Sur le plan, $dS^2 = dX^2 + dY^2$, calculons $dX$ et $dY$ :

$$\begin{matrix} dX = Rd\lambda \\ dY = R.\dfrac{d\varphi}{2cos^2(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\varphi}{2})tg(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\varphi}{2})} = R.\dfrac{d\varphi}{2cos(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\varphi}{2})sin(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\varphi}{2})} = R.\dfrac{d\varphi}{sin(\dfrac{\pi}{2} + \varphi)} = \dfrac{Rd\varphi}{cos\varphi} \end{matrix}$$

Alors $dS^2$ vaut :

$$dS^2 = dX^2 + +dY^2 = R^2d\lambda^2 + \frac{R^2d\varphi^2}{cos^2\varphi} = \frac{R^2d\varphi^2 + R^2cos^2\varphi d\lambda^2}{cos^2\varphi}$$

Or $ds^2 = R^2d\varphi^2 + R^2cos^2\varphi d\lambda^2$, par suite :

$$m = \frac{dS}{ds} = \frac{1}{cos\varphi}$$

3. Le module linéaire $m_1$ le long du méridien ($\lambda = cte$) est $m = 1/cos\varphi$, mais qui varie le long du méridien. Le module linéaire $m_2$ le long d'un parallèle ($\varphi = cte$) est $m = 1/cos\varphi$ mais reste fixe.

4. En un point $P(\varphi, \lambda)$ le module linéaire $m = m_1 = m_2 = \dfrac{1}{cos\varphi}$. Oui la représentation plane est conforme, car le module linéaire dépend du point et non de la direction.

5. On suppose que $P$ décrit sur la surface $\Sigma$ une courbe $(\gamma)$ telle que $\varphi$ et $\lambda$ sont liées par la relation : $tg\varphi = sin\lambda$. Pour $\varphi = 0\,gr$, $2\,gr$, $4\,gr$, $6\,gr$, $8\,gr$ et $10\,gr$, ci-dessous un tableau donnant les valeurs de $\lambda$ correspondantes :

| $\varphi$ | 0 gr | 2 gr | 4 gr | 6 gr | 8 gr | 10 gr |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lambda$ | 0 gr | 2.0010 gr | 3.9921 gr | 5.9735 gr | 7.9376 gr | 9.8789 gr |

**1. Tableau des valeurs de $\lambda$ correspondantes**

6. Sachant que $R = 1000\,m$, on calcule ci-dessous les coordonnées $(X, Y)$ de la représentation plane donnée pour les valeurs de $\varphi$ et $\lambda$ du tableau 1. :

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $X(m)$ | 0 | 31.48 | 62.83 | 94.25 | 125.66 | 157.08 |
| $Y(m)$ | 0 | 31.42 | 62.75 | 93.97 | 125.00 | 155.80 |

**2. Tableau des coordonnées $(X, Y)$ des valeurs de $\varphi, \lambda$ correspondantes**

7. Rapportant à l'échelle $1/100$ sur le plan $OXY$, les positions $(X, Y)$ des points du tableau 1. on trouve que l'image de la courbe $(\gamma)$ est une droite qui passe par l'origine.

**Note de l'auteur :** l'image est une droite donc une ligne géodésique du plan, par suite la courbe $tg\varphi = sin\lambda$ est une géodésique de la sphère donc un grand cercle qui part du point $(R, 0, 0)$ car les représentations planes conformes conservent les géodésiques.

**Correction 50.**

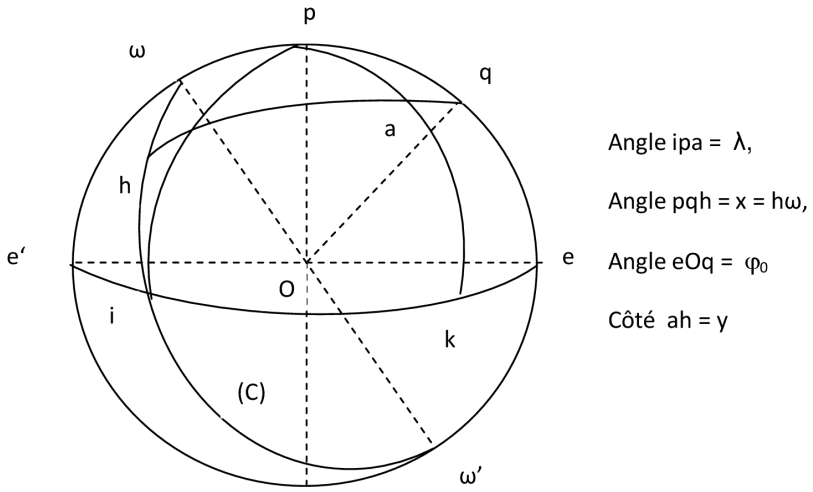



FIGURE 30 – Représentation cylindrique conforme oblique tangente

1. Le triangle $pqa$ est sphérique, la formule fondamentale de la trigonométrie sphérique donne :

$$cos(\pi/2-y) = cos(\pi/2-\varphi)cos(\pi/2-\varphi_0) + sin(\pi/2-\varphi)sin(\pi/2-\varphi_0)cos(\pi/2-\lambda) \Longrightarrow$$
$$siny = sin\varphi sin\varphi_0 + cos\varphi cos\varphi_0 sin\lambda \Longrightarrow y = y(\varphi, \lambda, \varphi_0)$$

Utilisant le même triangle sphérique, on applique la formule des sinus, on obtient :

$$\frac{sin(\pi/2-\lambda)}{sin(\pi/2-y)} = \frac{sinx}{sin(\pi/2-\varphi)} \Longrightarrow \frac{sinx}{cos\varphi} = \frac{cos\lambda}{cosy} \Longrightarrow cosy = \frac{cos\varphi cos\lambda}{sinx}$$

Dans le même triangle, on utilise la formule de sinus cosinus : $sina.cosB = cosb.sinc - cosc.sinb.cosA$ où on prend $A = \pi/2-\lambda, B = x$, on obtient :

$$sin(\pi/2-y)cosx = cos(\pi/2-\varphi)sin(\pi/2-\varphi_0) - cos(\pi/2-\varphi_0)sin(\pi/2-\varphi)cos(\pi/2-\lambda) \Longrightarrow$$
$$cosy.cosx = sin\varphi cos\varphi_0 - sin\varphi_0 cos\varphi cos\lambda$$

On remplace $cosy$ par $\frac{cos\varphi cos\lambda}{sinx}$, on obtient la formule donnant $x$ :

$$cotgx = cos\varphi_0 \frac{tg\varphi}{cos\lambda} - sin\varphi_0$$

Alors les coordonnées $X, Y$ de l'image du point $a$ :

$$\begin{cases} X = 1.x = x, \\ Y = 1.Logtg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{y}{2}\right) = Logtg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{y}{2}\right). \end{cases}$$

On vérifie les formules en prenant $\varphi_0 = 0$, dans ce cas on a une représentation cylindrique conforme transverse avec les variables de Cassini-Soldner (**voir Correction** $n°7$) $H, L$ avec $H = y$ et $L = \pi/2 - x$. La formule de $cotgx$ devient $tgL = \frac{tg\varphi}{cos\lambda}$ et la formule $siny$ devient $sinH = cos\varphi sin\lambda$.

2. De l'expression $siny = sin\varphi sin\varphi_0 + cos\varphi cos\varphi_0 sin\lambda$ ci-dessus, on prend $\varphi = \varphi_0$, on obtient :

$$siny = sin^2\varphi_0 + cos^2\varphi_0 sin\lambda$$

Or $cos^2 y = 1 - sin^2 y$ d'où :

$$cos^2 y = 1 - (sin^2\varphi_0 + cos^2\varphi_0 sin\lambda)^2 = (1 - sin^2\varphi_0 + cos^2\varphi_0 sin\lambda)(1 + sin^2\varphi_0 + cos^2\varphi_0 sin\lambda) \Longrightarrow$$
$$cos^2 y = cos^2\varphi_0(1 - sin\lambda)(2 - cos^2\varphi_0 + cos^2\varphi_0 sin\lambda),\ \ let\, B = 2 - cos^2\varphi_0 + cos^2\varphi_0 sin\lambda \Longrightarrow$$
$$cosy = cos\varphi_0\sqrt{(1 - sin\lambda)B}$$

Il s'ensuit :

$$tgy = \frac{sin^2\varphi_0 + cos^2\varphi_0 sin\lambda}{cos\varphi_0\sqrt{(1 - sin\lambda)B}}$$

On rappelle que $tgy = \frac{2tg(y/2)}{1 - tg^2(y/2)}$. On va exprimer $e^Y$ en fonction de $\varphi_0$ et $\lambda$. On a $e^Y = tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{y}{2}\right) = \frac{1 + tg(y/2)}{1 - tg(y/2)}$. On pose :

$$\alpha = tgy = \frac{sin^2\varphi_0 + cos^2\varphi_0 sin\lambda}{cos\varphi_0\sqrt{(1 - sin\lambda)B}} = \frac{2tg(y/2)}{1 - tg^2(y/2)}, \quad t = tg(y/2) \Longrightarrow \alpha.t^2 + 2t - \alpha = 0$$

La solution de $\alpha.t^2 + 2t - \alpha = 0$ :

$$\Delta' = 1 + \alpha^2 = 1 + \frac{(sin^2\varphi_0 + cos^2\varphi_0 sin\lambda)^2}{cos^2\varphi_0(1 - sin\lambda)B} = \frac{cos^2\varphi_0(1 - sin\lambda)B + (sin^2\varphi_0 + cos^2\varphi_0 sin\lambda)^2}{cos^2\varphi_0(1 - sin\lambda)B} \Longrightarrow$$
$$\Delta' == \frac{cos^2\varphi_0(1 - sin\lambda)(2 - cos^2\varphi_0 + cos^2\varphi_0 sin\lambda) + (sin^2\varphi_0 + cos^2\varphi_0 sin\lambda)^2}{cos^2\varphi_0(1 - sin\lambda)B} = \frac{1}{cos^2\varphi_0(1 - sin\lambda)B} \Longrightarrow$$
$$\sqrt{\Delta'} = \frac{1}{cos\varphi_0\sqrt{(1 - sin\lambda)B}}$$

On considère seulement la racine positive $t_1$ avec :

$$t_1 = tg(y/2) = \frac{-1 + \sqrt{\Delta'}}{\alpha} = \frac{-1 + \frac{1}{cos\varphi_0\sqrt{(1 - sin\lambda)B}}}{\frac{sin^2\varphi_0 + cos^2\varphi_0 sin\lambda}{cos\varphi_0\sqrt{(1 - sin\lambda)\sqrt{B}}}} = \frac{1 - cos\varphi_0\sqrt{(1 - sin\lambda)B}}{sin^2\varphi_0 + cos^2\varphi_0 sin\lambda}$$

Exprimons maintenant le terme $e^Y$ :

$$e^Y = tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{y}{2}\right) = \frac{1 + tg(y/2)}{1 - tg(y/2)} = \frac{1 + t_1}{1 - t_1} = \frac{1 + \frac{1 - cos\varphi_0\sqrt{(1 - sin\lambda)B}}{sin^2\varphi_0 + cos^2\varphi_0 sin\lambda}}{1 - \frac{1 - cos\varphi_0\sqrt{(1 - sin\lambda)B}}{sin^2\varphi_0 + cos^2\varphi_0 sin\lambda}} \Longrightarrow$$

$$e^Y = \frac{sin^2\varphi_0 + cos^2\varphi_0 sin\lambda + 1 - cos\varphi_0\sqrt{(1-sin\lambda)B}}{sin^2\varphi_0 + cos^2\varphi_0 sin\lambda - 1 + cos\varphi_0\sqrt{(1-sin\lambda)B}} = \frac{2 - cos^2\varphi_0(1-sin\lambda) - cos\varphi_0\sqrt{(1-sin\lambda)B}}{-cos^2\varphi_0(1-sin\lambda) + cos\varphi_0\sqrt{(1-sin\lambda)B}}$$

$$e^Y = \frac{(2 - cos^2\varphi_0(1-sin\lambda) - cos\varphi_0\sqrt{(1-sin\lambda)B})(-cos^2\varphi_0(1-sin\lambda) - cos\varphi_0\sqrt{(1-sin\lambda)B})}{cos^2\varphi_0(1-sin\lambda)(cos^2\varphi_0(1-sin\lambda) - B)}$$

On a donc :

$$cos^2\varphi_0(1-sin\lambda)(cos^2\varphi_0(1-sin\lambda) - B) = cos^2\varphi_0(1-sin\lambda)(cos^2\varphi_0(1-sin\lambda) - (2 - cos^2\varphi_0 + cos^2\varphi_0 sin\lambda))$$

$$cos^2\varphi_0(1-sin\lambda)(cos^2\varphi_0(1-sin\lambda) - B) = -2cos^2\varphi_0(1-sin\lambda)(1 - cos^2\varphi_0(1-sin\lambda))$$

Un petit calcul du numérateur de $e^Y$, on arrive à $-2cos\varphi_0\sqrt{(1-sin\lambda)B}(1-cos^2\varphi_0(1-sin\lambda))$. On arrive au résultat suivant :

$$e^Y = \frac{-2cos\varphi_0\sqrt{(1-sin\lambda)B}(1-cos^2\varphi_0(1-sin\lambda))}{-2cos^2\varphi_0(1-sin\lambda)(1-cos^2\varphi_0(1-sin\lambda))} = \frac{1}{cos\varphi_0}.\frac{\sqrt{(1-sin\lambda)B}}{1-sin\lambda}$$

Calculons maintenant $cosX = cosx$. Appliquons la formule fondamentale de la trigonométrique sphérique au triangle sphérique $paq$ :

$$cos(\pi/2 - \varphi) = sin\varphi = sin\varphi_0 siny + cos\varphi_0 cosy cosx$$

Prenons $\varphi = \varphi_0$, on obtient :

$$cosx = tg\varphi_0\left(\frac{1}{cosy} - tgy\right)$$

Comme on a calculé plus haut $cosy = cos\varphi_0\sqrt{(1-sin\lambda)B}$ et $tgy = \frac{sin^2\varphi_0 + cos^2\varphi_0 sin\lambda}{cos\varphi_0\sqrt{(1-sin\lambda)B}}$, on obtient :

$$cosx = cosX = tg\varphi_0\left(\frac{1}{cos\varphi_0\sqrt{(1-sin\lambda)B}} - \frac{sin^2\varphi_0 + cos^2\varphi_0 sin\lambda}{cos\varphi_0\sqrt{(1-sin\lambda)B}}\right) = sin\varphi_0.\frac{(1-sin\lambda)}{\sqrt{(1-sin\lambda)B}}$$

Alors le produit $e^Y.cosX$ donne le résultat demandé soit :

$$e^Y.cosX = \frac{1}{cos\varphi_0}.\frac{\sqrt{(1-sin\lambda)B}}{1-sin\lambda}.sin\varphi_0.\frac{(1-sin\lambda)}{\sqrt{(1-sin\lambda)B}} = tg\varphi_0, \qquad C.Q.F.D.$$

C'est l'équation de l'image plane du parallèle de latitude $\varphi_0$.

3.a. De la formule : $siny = sin\varphi sin\varphi_0 + cos\varphi cos\varphi_0 sin\lambda$, on obtient pour $\varphi = 0$ :

$$siny = cos\varphi_0 sin\lambda, \quad cosy = \sqrt{1 - cos^2\varphi_0 sin^2\lambda} \Longrightarrow tgy = \frac{cos\varphi_0 sin\lambda}{\sqrt{1 - cos^2\varphi_0 sin^2\lambda}} = \beta$$

On applique la même méthodologie, on pose $t = tg(y/2)$, on résoud l'équation $\frac{2t}{1-t^2} = \beta \Longrightarrow \beta t^2 + 2t - \beta = 0$. D'où $\Delta' = 1 + \beta^2 = \frac{1}{1 - cos^2\varphi_0 sin^2\lambda} \Rightarrow \sqrt{\Delta'} = \frac{1}{\sqrt{1 - cos^2\varphi_0 sin^2\lambda}}$. On obtient la valeur de $t_1 = tg(y/2)$ :

$$t_1 = \frac{-1 + \sqrt{\Delta'}}{\beta} = \frac{1 - \sqrt{1 - cos^2\varphi_0 sin^2\lambda}}{cos\varphi_0 sin\lambda} \Longrightarrow e^Y = \frac{1 + t_1}{1 - t_1} = \frac{(cos\varphi_0 sin\lambda + 1) - \sqrt{1 - cos^2\varphi_0 sin^2\lambda}}{(cos\varphi_0 sin\lambda - 1) + \sqrt{1 - cos^2\varphi_0 sin^2\lambda}}$$

Après les calculs de simplification, on arrive à :

$$e^Y = \frac{\sqrt{1 - cos^2\varphi_0 sin^2\lambda}}{1 - cos\varphi_0 sin\lambda} \Longrightarrow shY = (e^Y - e^{-Y})/2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{1 - cos^2\varphi_0 sin^2\lambda}}{1 - cos\varphi_0 sin\lambda} - \frac{1 - cos\varphi_0 sin\lambda}{\sqrt{1 - cos^2\varphi_0 sin^2\lambda}}\right)$$

Ce qui donne :

$$shY = \frac{cos\varphi_0 sin\lambda}{\sqrt{1-cos^2\varphi_0 sin^2\lambda}}$$

Calcul de $cosX = cosx$ : de la formule $sin\varphi = sin\varphi_0 siny + cos\varphi_0 cosycosx$, on obtient $cosx = -tg\varphi_0 tgy$, d'où :

$$cosX = -tg\varphi_0.\frac{cos\varphi_0 sin\lambda}{\sqrt{1-cos^2\varphi_0 sin^2\lambda}} \Longrightarrow cosX = -\frac{sin\varphi_0 sin\lambda}{\sqrt{1-cos^2\varphi_0 sin^2\lambda}}$$

Finalement, on arrive au résultat demandé :

$$cosX + tg\varphi_0.shY = -\frac{sin\varphi_0 sin\lambda}{\sqrt{1-cos^2\varphi_0 sin^2\lambda}} + tg\varphi_0.\frac{cos\varphi_0 sin\lambda}{\sqrt{1-cos^2\varphi_0 sin^2\lambda}} = 0$$

L'image plan de l'équateur a pour équation $cosX + tg\varphi_0.shY = 0$.

3.b. Recherche de l'équation de l'image du méridien $\lambda = 0$ : Le triangle $pqa$ est sphérique, la formule fondamentale de la trigonométrie sphérique donne :

$$siny = sin\varphi sin\varphi_0 + cos\varphi cos\varphi_0 sin\lambda,\ \lambda = 0 \Longrightarrow siny = sin\varphi_0.sin\varphi$$

Le triangle $pqa$ est sphérique, on applique la formule des sinus, on obtient :

$$cosy = \frac{cos\varphi cos\lambda}{sinx},\ \lambda = 0 \Longrightarrow cosy = \frac{cos\varphi}{sinx}$$

On déduit $tgy = \frac{sin\varphi_0 sin\varphi sinx}{cos\varphi} = sin\varphi_0 tg\varphi sinx$. De $cosy = \frac{cos\varphi}{sinx}$, on obtient : $sin\varphi = \sqrt{1-cos^2 y sin^2 x}$. Alors $siny = sin\varphi_0.sin\varphi$ devient $siny = sin\varphi_0\sqrt{1-cos^2 y sin^2 x}$ ce qui donne $\frac{sin^2 y}{sin^2\varphi_0} = 1 - cos^2 y sin^2 x$, on remplace $sin^2 y$ par $1-cos^2 y$, on arrive à $cos^2 y = \frac{cos^2\varphi_0}{1-sin^2\varphi_0 sin^2 x}$. On fait introduire $tgy$, utilisant $1 + tg^2 y = \frac{1}{cos^2 y}$, on arrive à $tgy = tg\varphi_0 cosx = tg\varphi_0 cosX$ qu'on note par $\gamma$.

On applique la même méthodologie, on pose $t = tg(y/2)$, on résoud l'équation $\frac{2t}{1-t^2} = \gamma \Longrightarrow \gamma t^2 + 2t - \gamma = 0$. D'où $\Delta' = 1 + \gamma^2 = 1 + tg^2\varphi_0 cos^2 X \Rightarrow \sqrt{\Delta'} = \sqrt{1 + tg^2\varphi_0 cos^2 X}$. On obtient la valeur de $t_1 = tg(y/2)$ :

$$t_1 = \frac{-1+\sqrt{\Delta'}}{\gamma} = \frac{-1+\sqrt{1+tg^2\varphi_0 cos^2 X}}{tg\varphi_0 cosX} \Longrightarrow e^Y = \frac{1+t_1}{1-t_1} = \frac{(tg\varphi_0 cosX - 1) + \sqrt{1+tg^2\varphi_0 cos^2 X}}{(tg\varphi_0 cosX + 1) - \sqrt{1+tg^2\varphi_0 cos^2 X}}$$

Après les calculs de simplification, on arrive à : $e^Y = tg\varphi_0 cosX + \sqrt{1+tg^2\varphi_0 cos^2 X}$.
Calculons $e^{-Y} = 1/e^Y = \frac{1}{tg\varphi_0 cosX + \sqrt{1+tg^2\varphi_0 cos^2 X}} = \sqrt{1+tg^2\varphi_0 cos^2 X} - tg\varphi_0 cosX$. Ce qui donne :

$$2shY = e^Y - e^{-Y} = 2tg\varphi_0 cosX \Longrightarrow shY - tg\varphi_0 cosX = 0$$

C'est l'équation de l'image du méridien $\lambda = 0$.

4.a Calcul du Gisement. On se place dans le repère $\Omega XY$. L'image du méridien origine est d'équation $shY - tg\varphi_0 cosX = 0$. Le gisement $G$ vérifie $tgG = -\frac{dX}{dY}$ ce qui donne à partir de l'équation

précédente $\frac{dX}{dY} = -\frac{chY}{tg\varphi_0 sinX}$ mais $chY = \frac{1}{cosy}$ et $sinX = sinx = \frac{cos\varphi cos\lambda}{cosy}$. On obtient donc $tgG = \frac{1}{tg\varphi_0 cos\varphi cos\lambda}$.

4.b Calcul du module linéaire au point $p$. $m^2 = \frac{dX^2 + dY^2}{d\varphi^2 + cos^2\varphi d\lambda^2}$. Or $dY = dy/cosy$ et $X = x$ vérifie l'équation déjà vue $cotgx = cos\varphi_0 \frac{tg\varphi}{cos\lambda} - sin\varphi_0$. Différentions cette dernière équation, on obtient :

$$dx = dX = \frac{-1}{1 + \left(cos\varphi_0 \frac{tg\varphi}{cos\lambda} - sin\varphi_0\right)^2} \left(cos\varphi_0 \frac{d\varphi}{cos\lambda cos^2\varphi} + cos\varphi_0 \frac{tg\varphi sin\lambda d\lambda}{cos^2\lambda}\right) \Longrightarrow$$

$$dX = A.cos\varphi_0 \left(\frac{d\varphi}{cos\lambda cos^2\varphi} + \frac{tg\varphi sin\lambda d\lambda}{cos^2\lambda}\right),\ A = \frac{-1}{1 + \left(cos\varphi_0 \frac{tg\varphi}{cos\lambda} - sin\varphi_0\right)^2}$$

De l'équation $siny = sin\varphi_0 sin\varphi + cos\varphi_0 cos\varphi sin\lambda$, on va calculer $dy$. D'où :

$$cosydy = sin\varphi_0 cos\varphi d\varphi - cos\varphi_0 sin\varphi sin\lambda d\varphi + cos\varphi_0 cos\varphi cos\lambda d\lambda \Longrightarrow$$

$$dy = \frac{1}{cosy}\left[(sin\varphi_0 cos\varphi - cos\varphi_0 sin\varphi sin\lambda)\, d\varphi + cos\varphi_0 cos\varphi cos\lambda d\lambda\right]$$

Ecrivons $m^2$ :

$$m^2 = \frac{1}{d\varphi^2 + cos^2\varphi d\lambda^2} \cdot \left[\frac{1}{cos^2 y}\left[(sin\varphi_0 cos\varphi - cos\varphi_0 sin\varphi sin\lambda)\, d\varphi + cos\varphi_0 cos\varphi cos\lambda d\lambda\right]^2 + A^2 cos^2\varphi_0 \left(\frac{d\varphi}{cos\lambda cos^2\varphi} + \frac{tg\varphi sin\lambda d\lambda}{cos^2\lambda}\right)^2\right]$$

Le point $p$ appartient au méridien $\lambda = 0$ et $\varphi_p = \pi/2$, ses coordonnées $(X, Y)$ sont $X = x = 0, y = \varphi_0 \Rightarrow Y_p = Logtg(\pi/4 + \varphi_0/2)$. Dans la formule $m^2$, comme $\varphi = \varphi_p = \pi/2$, la premier terme devient $\frac{1}{d\varphi^2}$. Le terme $\frac{1}{cos^2 y}[...]^2$ est nul avec $cos^2 y = cos^2\varphi_0 \neq 0$, car il contient $cos\varphi = cos\varphi_p = 0$ et $sin\lambda = sin0 = 0$. $m^2$ devient :

$$m^2 = \frac{cos^2\varphi_0}{d\varphi^2} \cdot \frac{A^2}{cos^4\varphi} (d\varphi + sin\varphi cos\varphi sin\lambda d\lambda)^2 = cos^2\varphi_0 \cdot \frac{A^2}{cos^4\varphi}$$

Le terme $A^2$ devient :

$$A^2 = \frac{1}{\left[tg^2\varphi \left(cos\varphi_0 - \frac{sin\varphi_0}{tg\varphi}\right)^2 + 1\right]^2} = \frac{1}{tg^4\varphi \left[\left(cos\varphi_0 - \frac{sin\varphi_0}{tg\varphi}\right)^2 + \frac{1}{tg^4\varphi}\right]^2}$$

Maintenant le calcul de $m^2$ donne après la levée de l'indétermination quand $\varphi \longrightarrow \frac{\pi}{2}$ :

$$m^2 = \frac{cos^2\varphi_0}{cos^4\varphi_0} \Longrightarrow m = \frac{1}{cos\varphi_0}$$

Le résultat est attendu, car pour la représentation étudiée dans le repère $\Omega XY$, on a $m = 1/cosy = 1/cos\varphi_0$.

4.c Calcul du module linéaire au point $a$ de l'équateur. Soit le point $a$ sur l'équateur voir (**Fig. 31**), ses coordonnées sont $(\varphi = 0, \lambda = \lambda_0)$. On va utiliser la remarque de la question précédente. D'après

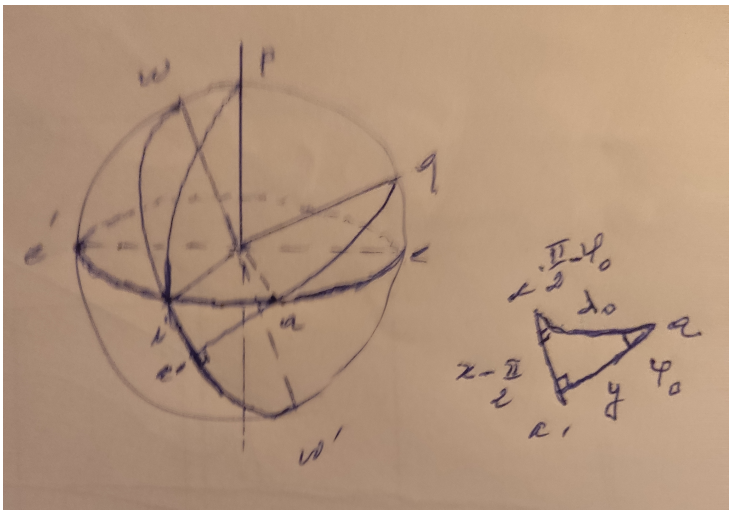


FIGURE 31 – Calcul du module linéaire au point $a(\varphi = 0, \lambda = \lambda_0)$

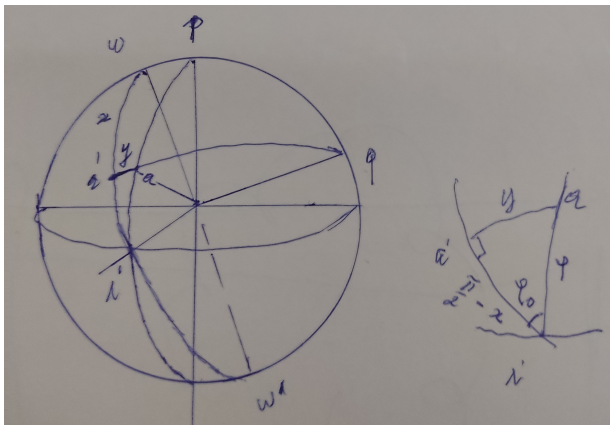


FIGURE 32 – Calcul du module linéaire au point $a(\varphi, \lambda = 0)$ appartenant au méridien origine

le triangle sphérique $iaa'$, la règle des sinus donne :

$$\frac{sin(\pi/2)}{sin\lambda_0} = \frac{sin(\pi/2-\varphi_0)}{siny} \Longrightarrow siny = cos\varphi_0 sin\lambda_0 \Longrightarrow cosy = \sqrt{1-cos^2\varphi_0 sin^2\lambda_0} \Longrightarrow$$

$$m = \frac{1}{cosy} = \frac{1}{\sqrt{1-cos^2\varphi_0 sin^2\lambda_0}}$$

4.d Calcul du module linéaire en un point du méridien origine. Soit le point $a$ sur le méridien origine ($\lambda = 0$) (**Fig. 32**), ses coordonnées sont $(\varphi, \lambda = 0)$. On va utiliser la remarque de la question précédente. D'après le triangle sphérique $iaa'$, la règle des sinus donne :

$$\frac{sin(\pi/2)}{sin\varphi} = \frac{sin\varphi_0}{siny} \Longrightarrow m = \frac{1}{cosy} = \frac{1}{\sqrt{1-sin^2\varphi_0 sin^2\varphi}}$$

**Correction 51.**

$$p(X,Y)\begin{cases} X = 2R.sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right).cos\lambda \\ \\ Y = 2R.sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right).sin\lambda \end{cases} \tag{21.1}$$

1. L'image du pôle nord $P_N$ est le point origine $O$ du plan $OXY$.

2. L'image d'un méridien ($\lambda = \lambda_0$=constante ) est la droite $Y - Xtg\lambda_0 = 0$.
3. On élimine la variable $\lambda$ des 2 coordonnées $X, Y$, on obtient l'équation d'un cercle de centre situé au point $O$, soit :

$$X^2 + Y^2 = 4R^2 sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_0}{2}\right)$$

4. Sur la sphère $\mathbb{S}^2$, les méridiens et les parallèles se coupent suivant un angle droit. Leurs images aussi se coupent suivant un angle droit. En utilisant le lemme de Tissot, les directions principales en un point est la droite passant par le point et le point $O$ et la tangente au cercle géocentrique passant par le point.

5. La sphère $\mathbb{S}^2$ est paramétrée comme suit :

$$M = \begin{cases} x = cos\varphi cos\lambda \\ y = cos\varphi sin\lambda \\ z = sin\varphi \end{cases}$$

Par suite, on obtient $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = R^2 d\varphi^2 + R^2 cos^2\varphi d\lambda^2$.

6. Calculons les différentielles $dX, dY$ :

$$dX = -2R.sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right).sin\lambda d\lambda - \frac{1}{2}.2R.cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right).cos\lambda d\varphi$$

$$dY = +2R.sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right).cos\lambda d\lambda - \frac{1}{2}.2R.cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right).sin\lambda d\varphi \Longrightarrow$$

$$dX^2 = 4R^2 sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) sin^2\lambda d\lambda^2 + 4R^2 sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) sin\lambda cos\lambda d\varphi d\lambda + R^2 cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) cos^2\lambda d\varphi^2$$

$$dY^2 = 4R^2 sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) cos^2\lambda d\lambda^2 - 4R^2 sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) sin\lambda cos\lambda d\varphi d\lambda + R^2 cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) sin^2\lambda d\varphi^2$$

Dans la some $dx^2 + dY^2$ les termes $d\varphi d\lambda$ disparaissent et on obtient :

$$dS^2 = R^2 cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) d\varphi^2 + 4R^2 sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right).d\lambda^2$$

7. Le carré du module linéaire $m^2$ s'écrit :

$$m^2 = \frac{dS^2}{ds^2} = \frac{cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) d\varphi^2 + 4sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right).d\lambda^2}{d\varphi^2 + cos^2\varphi d\lambda^2}$$

8. Calcul du module linéaire $m_1$ le long du parallèle :

$$m_1 = m_{\varphi=cte} = \frac{4sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)}{cos^2\varphi} = \frac{2\left(1 - cos2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)\right)}{cos^2\varphi} = \frac{2(1 - sin\varphi)}{cos^2\varphi}$$

9. Calcul du module linéaire $m_2$ le long du méridien :

$$m_2 = m_{\lambda=cte} = cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + cos2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)\right) = \frac{1}{2}(1 + sin\varphi)$$

10. La représentation plane définie par (21.1) est une représentation équivalente car le produit des modules linéaires $m_1 m_2 = 1$. En effet, on obtient :

$$m_1.m_2 = \frac{2(1 - sin\varphi}{cos^2\varphi}.\frac{1}{2}(1 + sin\varphi) = \frac{(1 - sin^2\varphi)}{cos^2\varphi} = \frac{cos^2\varphi}{cos^2\varphi} = 1$$

**Correction 52.** Etude de la représentation conforme d'une sphère de rayon unité dite représentation de Littrow[9] définie par :

$$Z = sinz \ avec \ z = \lambda + iL \ \ et \ \ Z = X + iY$$

1. On rappelle :

$$chx = (e^x + e^{-x})/2 \in [1, +\infty[, \quad shx = (e^x - e^{-x})/2 \in \mathbb{R}, \quad thx = shx/chx \in [-1, +1]$$

$$e^{iz} = cosz + isinz, \ e^{-iz} = cosz - isinz \Longrightarrow sinz = (e^{iz} - e^{-iz})/(2i) = -i(e^{iz} - e^{-iz})/2$$

Or $iz = i(\lambda + iL) = -L + i\lambda \Rightarrow e^{iz} = e^{-L}(cos\lambda + isin\lambda)$ et $-iz = L - i\lambda \Rightarrow e^{-iz} = e^{L}(cos\lambda - isin\lambda)$. On obtient l'équation :

$$X + iY = -i[e^{-L}(cos\lambda + isin\lambda) - e^{L}(cos\lambda - isin\lambda)]/2 \Longrightarrow \begin{cases} X = sin\lambda.chL \\ Y = cos\lambda.shL \end{cases}$$

Pour $\lambda_0 = 0$, l'image du méridien origine est $X = 0$ c'est-à-dire l'axe des $Y$ : en effet $-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2 \Longrightarrow 0 \leq \pi/4 + \varphi/2 \leq \pi/2 \Longrightarrow 0 = tg0 \leq tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) \leq +\infty$. Par suite on obtient :

$$-\infty \leq L = Logtg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) \leq +\infty \Longrightarrow -\infty \leq Y = shL \leq +\infty$$

Pour $\lambda = \pm\pi/2$ les images de ces deux méridiens sont la droite $Y = 0$ c'est-à-dire l'axe des $X$. Utilisant la même méthode ci-dessus, on trouve que les images sont sur la demie droite $[1, +\infty[$. Les images des autres méridiens $\lambda = \lambda_0$ sont des hyperboles (**Fig. 33**) dont l'équation est donnée par :

$$\frac{X^2}{sin^2\lambda_0} - \frac{Y^2}{cos^2\lambda_0} = 1, \quad \lambda_0 \in ]0, \pi/2[$$

Posons $a = sin\lambda_0, b = cos\lambda_0$. Les sommets de ces hyperboles sont les points $(a, 0)(-a, 0)$. Soit $c = \sqrt{a^2 + b^2} = 1$, les coordonnées des foyers sont $F(c, 0), F'(-c, 0)$. L'excentricité des hyperboles est $e = \dfrac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \dfrac{1}{sin\lambda_0} > 1$.

Si $\varphi = \varphi_0 = 0 \Longrightarrow L_0 = 0 \Longrightarrow shL_0 = 0 \Longrightarrow Y = 0, X = sin\lambda$, l'image de l'équateur est le segment $[-1, +1]$ de l'axe des $X$. Pour $\varphi_0 \neq 0$, les images des parallèles $\varphi = \varphi_0$ sont des ellipses (**Fig. 33**) d'équations :

$$\frac{X^2}{ch^2L_0} + \frac{Y^2}{sh^2L_0} = 1, \quad chL_0 > shL_0$$

Les paramètres de ces ellipses sont : $a = chL, b = shL, e^2 = 1 - b^2/a^2 = 1 - ch^2L/sh^2L$.

2. Aux points $f(0, \pi/2), f'(0, -\pi/2)$, $L = 0 \Longrightarrow shL = 0$, l'équation $\dfrac{X^2}{ch^2L_0} + \dfrac{Y^2}{sh^2L_0} = 1$ n'est pas définie, donc les points $f, f'$ sont des points singuliers. De même, l'équation $\dfrac{X^2}{sin^2\lambda_0} - \dfrac{Y^2}{cos^2\lambda_0} = 1$ n'est pas définie, le terme $Y^2/cos^2\lambda_0$ devient infini. Donc là aussi les points $f, f'$ sont des points singuliers.

3. L'angle $\widehat{bp, bs} = \alpha$. C'est aussi $2\pi - Az$ où $Az$ est l'azimut de la direction $bs$. Avec les données du triangle sphérique $psb$ (**Fig. 34**), on va utiliser la formule sinus cotangente soit $sinA.cotgB = cotgb.sinc - cosc.cosA$. On prend $A = p, B = b, C = s$, on obtient :

$$sin\lambda.cotg\alpha = cotg\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_0.\right)sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) - cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right).cos\lambda \Longrightarrow$$

9. En hommage à Joseph Johann Littrow (1781-1840) astronome autrichien.

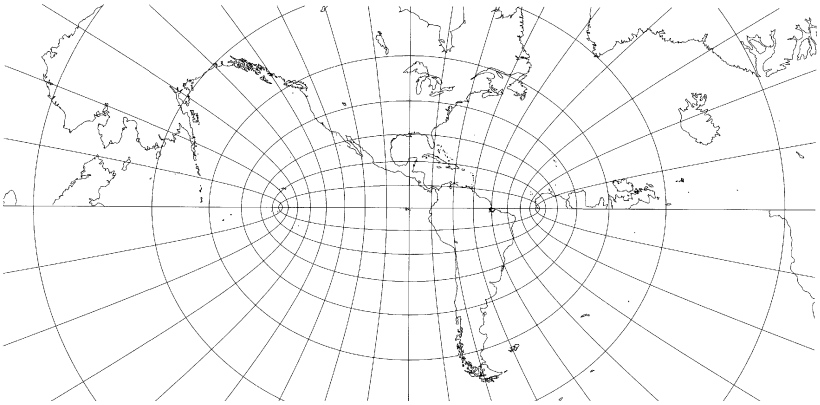


FIGURE 33 – Images des méridiens et des parallèles (le méridien central a pour longitude $\lambda = 90°$ Ouest).

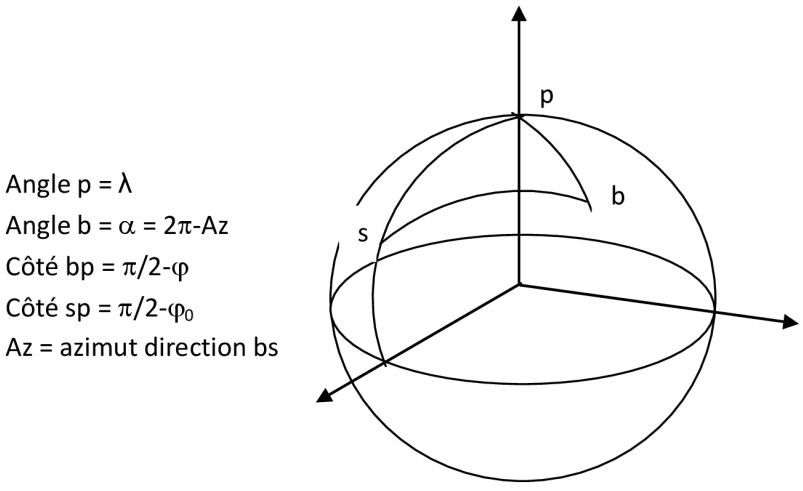



FIGURE 34 – Le triangle sphérique psb

$$sin\lambda.cotg\alpha = tg\varphi_0.cos\varphi - sin\varphi.cos\lambda \Longrightarrow$$
$$\frac{sin\lambda}{cos\varphi}.cotg\alpha = tg\varphi_0 - tg\varphi.cos\lambda$$

Revenons aux équations de la représentation plane de Littrow ($X = sin\lambda.chL, Y = cos\lambda.shL$). On va exprimer $chL$ et $shL$ en fonction de $\varphi$ et $\lambda$. On sait que $L = Logtg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right) \Longrightarrow e^L = tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)$. Posons $t = tg(\varphi/2)$, par suite $e^L = \frac{1+t}{1-t} \Longrightarrow e^{-L} = \frac{1-t}{1+t}$. Ce qui donne :

$$2chL = e^L + e^{-L} = \frac{1+t}{1-t} + \frac{1-t}{1+t} = 2.\frac{1+t^2}{1-t^2} \Longrightarrow 1+t^2 = 1+tg^2(\varphi/2) = \frac{1}{cos^2(\varphi/2)},$$
$$1-t^2 = 1-\frac{sin^2(\varphi/2)}{cos^2(\varphi/2)} = \frac{cos^2(\varphi/2)-sin^2(\varphi/2)}{cos^2(\varphi/2)} = \frac{cos2(\varphi/2)}{cos^2(\varphi/2)} = \frac{cos\varphi}{cos^2(\varphi/2)} \Longrightarrow$$
$$2chL = 2\frac{1}{cos^2(\varphi/2)}.\frac{cos^2(\varphi/2)}{cos\varphi} = 2\frac{1}{cos\varphi} \Longrightarrow chL = \frac{1}{cos\varphi}$$

De même, on a :

$$2shL = e^L - e^{-L} = \frac{1+t}{1-t} - \frac{1-t}{1+t} = \frac{4t}{1-t^2} \Longrightarrow 2shL = \frac{4tg(\varphi/2).cos^2(\varphi/2)}{cos\varphi},$$
$$2shL = \frac{4sin(\varphi/2)cos(\varphi/2)}{cos\varphi} = 2\frac{sin\varphi}{cos\varphi} \Longrightarrow shL = tg\varphi$$

Ainsi, les coordonnées $(X,Y)$ deviennent : $X = \frac{sin\lambda}{cos\varphi}$, $Y = cos\lambda tg\varphi$. Alors l'image du point $b$ s'écrit :

$$Xcotg\alpha = tg\varphi_0 - Y$$

L'image plane de la courbe décrite par $b$ est une droite.

**Correction 53.** Soit l'application $F(u,v) : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3\backslash(0,0,1)$ définie par :

$$OM(u,v) = F(u,v)\begin{cases} x = \dfrac{2u}{u^2+v^2+1} \\ y = \dfrac{2v}{u^2+v^2+1} \\ z = \dfrac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2+1} \end{cases}$$

1. La forme fondamentale est $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$. Le calcul de $dx, dy$ et $dz$ donne :

$$dx = \frac{2du}{u^2+v^2+1} - \frac{2u(2udu+2vdv)}{(u^2+v^2+1)^2} = \frac{2(-u^2+v^2+1)du - 4uvdv}{(u^2+v^2+1)^2}$$
$$dy = \frac{-4uvdu + 2(u^2-v^2+1)dv}{(u^2+v^2+1)^2}$$
$$dz = \frac{2(udu+vdv)}{u^2+v^2+1} - \frac{2(u^2+v^2-1)(udu+vdv)}{(u^2+v^2+1)^2} = \frac{4(udu+vdv)}{(u^2+v^2+1)^2}$$

Ce qui donne :

$$(u^2+v^2+1)^4 ds^2 = [2(-u^2+v^2+1)du - 4uvdv]^2 + [-4uvdu + 2(u^2-v^2+1)dv]^2 + [4(udu+vdv)]^2$$
$$(u^2+v^2+1)^4 ds^2 = (u^2+v^2+1)^2(du^2+dv^2) \Longrightarrow ds^2 = \frac{1}{(u^2+v^2+1)^2}(du^2+dv^2)$$

2. On a :

$$(x^2+y^2+z^2)(u^2+v^2+1)^2 = 4u^2+4v^2+(u^2+v^2-1)^2 = (u^2+v^2+1)^2 \Longrightarrow x^2+y^2+z^2 = 1$$

Donc $OM(u,v)$ appartient à la sphère $\mathbb{S}^2$ d'équation $x^2+y^2+z^3=1$.

3. De la coordonnée $z$, on calcule $u^2+v^2$ ce qui donne $u^2+v^2 = \dfrac{1+z}{1-z}$. On obtient donc :

$$u = \frac{x}{1-z}, \quad v = \frac{y}{1-z}$$

4. Soit le point $N(0,0,1)$ de $\mathbb{S}^2$, les composantes du vecteur $NM = (x,y,z-1)^T$. L'équation de la droite passant par $N$ et de direction $NM$ sous forme paramétrique :

$$\begin{cases} X = 0+tx \\ Y = 0+ty \\ Z = 1+t(z-1) \end{cases}$$

Comme $Z=0 \Longrightarrow t = \dfrac{1}{1-z}$. Les coordonnées planes de $p(X,Y)$ sont : $X = \dfrac{x}{1-z}$, $Y = \dfrac{y}{1-z}$.

5. Soit $\sigma$ l'application $\mathbb{R}^3\backslash(0,0,1) \longrightarrow \mathbb{R}^2 : (x,y,z) \longrightarrow (X,Y) = (X(x,y,z), Y(x,y,z))$. $\sigma$ est définie par $\sigma(x,y,z) = (X,Y) = \left(\dfrac{x}{1-z}, \dfrac{y}{1-z}\right)$. Calculons $(\sigma \circ F)(u,v)$, $F(u,v) = (x,y,z)^T$ où $z \neq 1$. En effet si $z=1 \Longrightarrow -1 = +1$ d'où la contradiction. Donc on peut calculer $\sigma(F(u,v))$ ce qui donne :

$$\sigma(F(u,v)) = \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}\right) = (u,v) \Longrightarrow (\sigma \circ F)(u,v) = \sigma(F(u,v)) = (u,v) \Longrightarrow$$
$$\sigma \circ (F(u,v)) = I(u,v) \Longrightarrow \sigma \circ F = I \Longrightarrow \sigma = F^{-1}$$

**Correction 54.** Soit un ellipsoïde de révolution $E(a,e)$ avec $a$ et $e$ respectivement le demi-grand axe de l'ellipsoïde de révolution et $e$ la première excentricité. Soit $\mathbb{S}^2$ une sphère de rayon $R$. On veut étudier le passage suivant :

$$p(\varphi,\lambda) \text{ de l'ellipsoïde } E \Rightarrow P(\psi,\Lambda) \text{de la sphère } \mathbb{S}^2$$

1. Le module linéaire $m$ de cette représentation est donné par $m = \dfrac{dS}{ds}$ avec :

$$ds^2_{\text{ellipsoïde}} = ds^2 = \rho^2 d\varphi^2 + N^2 cos^2\varphi d\lambda^2, \quad dS^2_{\text{sphère}} = dS^2 = R^2 d\psi^2 + R^2 cos^2\psi d\Lambda^2$$

$\rho, N$ les deux rayons de courbure pricipaux de l'ellipsoïde. $m^2$ devient :

$$m^2 = \frac{dS^2}{ds^2} = \frac{R^2 d\psi^2 + R^2 cos^2\psi d\Lambda^2}{\rho^2 d\varphi^2 + N^2 cos^2\varphi d\lambda^2} \Longrightarrow m = \sqrt{\frac{R^2 d\psi^2 + R^2 cos^2\psi d\Lambda^2}{\rho^2 d\varphi^2 + N^2 cos^2\varphi d\lambda^2}}$$

2. On pose :

$$z = \mathcal{L} + i\lambda, \quad Z = L + i\Lambda$$

avec :

$$\mathcal{L} = Logtg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right) - \frac{e}{2}Log\frac{1+esin\varphi}{1-esin\varphi}, \quad L = Logtg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\psi}{2}\right)$$

$\mathcal{L}$ est la latitude isométrique de l'ellipsoïde de révolution et $L$ la latitude de Mercator. Une transformation conforme entre $E$ et $\mathbb{S}^2$ est donnée par $Z = f(z)$ où $f$ est une fonction analytique. On propose le cas le plus simple à savoir :

$$Z = L + i\Lambda = \alpha z + \beta = (c_1 + ic_2)(\mathcal{L} + i\lambda) + b_1 + ib_2 \Longrightarrow$$
$$L = c_1\mathcal{L} - c_2\lambda + b_1, \quad \Lambda = c_1\lambda + c_2\mathcal{L} + b_2$$

3. On veut que l'image du méridien origine $\lambda = 0$ soit le méridien origine de la sphère $\Lambda = 0$, ça implique $\Lambda = 0 = c_1 \times 0 + c_2\mathcal{L} + b_2 \Longrightarrow c_2 = b_2 = 0 \Longrightarrow \Lambda = f(\lambda) = c_1\lambda$. Par suite, $L = c_1\mathcal{L} - c_2\lambda + b_1 = c_1\mathcal{L} + b_1 = g(\mathcal{L})$, c'est-dire que la repésentation transforme les parallèles de l'ellipsoïde ($\varphi = cte$) en parallèles de la sphère ($\psi = cte$).

4. On rappelle les relations entre les différentielles des variables :

$$d\mathcal{L} = \frac{\rho d\varphi}{N cos\varphi}, \quad dL = \frac{d\psi}{cos\psi}$$

Différentions les relations $L = c\mathcal{L} + b$ et $\Lambda = c\lambda$, ce qui donne :

$$dL = cd\mathcal{L}, \quad d\Lambda = cd\lambda$$
$$d\psi = cos\psi dL = c.cos\psi d\mathcal{L} \Longrightarrow d\psi = c.cos\psi \frac{\rho d\varphi}{N cos\varphi} \Longrightarrow$$
$$\frac{d\psi}{d\varphi} = \frac{c.\rho.cos\psi}{N cos\varphi}$$

Calculons $m^2$.

$$m^2 = \frac{R^2 d\psi^2 + R^2 cos^2\psi d\Lambda^2}{\rho^2 d\varphi^2 + N^2 cos^2\varphi d\lambda^2} = \frac{R^2 cos^2\psi(dL^2 + d\Lambda^2)}{N^2 cos^2\varphi(d\mathcal{L}^2 + d\lambda^2)}$$

or $dL = cd\mathcal{L}$ et $d\Lambda = c\lambda$, $m^2$ devient :

$$m^2 = \frac{R^2 cos^2\psi(c^2 d\mathcal{L}^2 + c^2 d\lambda^2)}{N^2 cos^2\varphi(d\mathcal{L}^2 + d\lambda^2)} = \frac{c^2 R^2 cos^2\psi(d\mathcal{L}^2 + d\lambda^2)}{N^2 cos^2\varphi(d\mathcal{L}^2 + d\lambda^2)} = \frac{c^2 R^2 cos^2\psi}{N^2 cos^2\varphi} \Longrightarrow$$
$$m = c.\frac{R cos\psi}{N cos\varphi}$$

Calculons les dérivées première et seconde de $m$ par rapport à la variable $\varphi$.

$$\frac{dm}{d\varphi} = -\frac{cRsin\psi}{N cos\varphi}.\frac{d\psi}{d\varphi} - \frac{cR cos\psi}{N^2 cos^2\varphi}.(-\rho sin\varphi) = -\frac{cRsin\psi}{N cos\varphi}.\frac{c.\rho.cos\psi}{N cos\varphi} + m\frac{\rho sin\varphi}{N cos\varphi} \Longrightarrow$$
$$\frac{dm}{d\varphi} = m\frac{\rho sin\varphi}{N cos\varphi} - \frac{mc\rho sin\psi}{N cos\varphi} = \frac{m\rho}{N cos\varphi}(sin\varphi - c.sin\psi) \Longrightarrow$$
$$\frac{d^2m}{d\varphi^2} = \frac{dm}{d\varphi}\frac{\rho}{N cos\varphi}(sin\varphi - c.sin\psi) + m\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{\rho}{N cos\varphi}\right)(sin\varphi - c.sin\psi) + \frac{m\rho}{N cos\varphi}\left(cos\varphi - c.cos\psi\frac{d\psi}{d\varphi}\right) \Longrightarrow$$
$$\frac{d^2m}{d\varphi^2} = \frac{dm}{d\varphi}\frac{\rho}{N cos\varphi}(sin\varphi - c.sin\psi) + m\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{\rho}{N cos\varphi}\right)(sin\varphi - c.sin\psi) + \frac{m\rho}{N cos\varphi}\left(cos\varphi - c.cos\psi\frac{c\rho cos\psi}{N cos\varphi}\right)$$

Les conditions demandées sont successivement :

$$m(\varphi_0) = 1, \quad \left(\frac{dm}{d\varphi}\right)\Big|_{\varphi=\varphi_0} = 0, \quad \left(\frac{d^2m}{d\varphi^2}\right)\Big|_{\varphi=\varphi_0} = 0$$

D'où :

1- $m(\varphi_0) = 1 \Longrightarrow cR cos\psi_0 = N_0 cos\varphi_0$.

2- $m'(\varphi_0) = 0 \Longrightarrow sin\varphi_0 - csin\psi_0 = 0 \Longrightarrow c = \frac{sin\varphi_0}{sin\psi_0}$.

3- $m"(\varphi_0) = 0 \Longrightarrow cos\varphi - c.cos\psi\frac{c\rho cos\psi}{N cos\varphi} = 0 \Longrightarrow \frac{1}{c^2 cos^2\psi_0} = \frac{\rho_0}{N_0}\frac{1}{cos^2\varphi_0} \Longrightarrow \frac{tg^2\psi_0}{sin^2\varphi_0} = \frac{1-e^2}{cos^2\varphi_0(1-e^2 sin^2\varphi_0)} \Longrightarrow tg\psi_0 = tg\varphi_0\sqrt{\frac{1-e^2}{1-e^2 sin^2\varphi_0}}$.

Cette dernière relation définit $\psi_0$ une fois on a choisi $\varphi_0$.

5. On a trouvé $c = \frac{sin\varphi_0}{sin\psi_0}$. De la relation $L = c\mathcal{L} + b$, on obtient la valeur numérique de $b$ soit $b = L(\psi_0) - \frac{sin\varphi_0}{sin\psi_0}\mathcal{L}(\varphi_0)$.

De $m(\varphi_0) = 1 \Longrightarrow R = \frac{N_0 cos\varphi_0}{c.cos\psi_0} = \frac{N_0 cos\varphi_0 sin\psi_0}{sin\varphi_0 cos\psi_0} = N_0 \frac{tg\psi_0}{tg\varphi_0} = N_0\sqrt{\frac{1-e^2}{1-e^2sin^2\varphi_0}} \Longrightarrow R = \frac{a\sqrt{1-e^2}}{1-e^2sin^2\varphi_0}$. Cette dernière équation donne la relation qui lie le rayon de la sphère $R$ avec le demi-grand axe $a$ de l'ellipsoïde de révolution.

6. Calculons l'expression du développement limité de $m(\varphi)$ de part et d'autre du parallèle $\varphi_0$ à l'ordre 3. Il s'écrit :

$$m(\varphi) = 1+(\varphi-\varphi_0)\left(\frac{dm}{d\varphi}\right)\Big|_{\varphi=\varphi_0} = 1+\frac{(\varphi-\varphi_0)^2}{2}\left(\frac{d^2m}{d\varphi^2}\right)\Big|_{\varphi=\varphi_0} + \frac{(\varphi-\varphi_0)^3}{6}\left(\frac{d^3m}{d\varphi^3}\right)\Big|_{\varphi=\varphi_0} + o((\varphi-\varphi_0)^4)$$

On peut écrire la dérivée d'ordre 3 de $m$ comme suit :

$$\frac{d^3m}{d\varphi^3} = A(\varphi) + \frac{m\rho^2}{N^2cos^2\varphi}\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{Ncos^2\varphi}{\rho} - c^2cos^2\psi\right),\ avec\ A(\varphi_0) = 0$$

Posons $B(\varphi) = \frac{Ncos^2\varphi}{\rho} - c^2cos^2\psi \Longrightarrow B(\varphi) = \frac{1}{1-e^2}(cos^2\varphi - (e^2/4)sin^2 2\varphi) - c^2cos^2\psi$. Calculons $dB/d\varphi$, d'où :

$$\frac{dB}{d\varphi} = \frac{-sin2\varphi(1+e^2cos2\varphi)}{1-e^2} + 2c^2cos\psi sin\psi\frac{d\psi}{d\varphi} = \frac{-sin2\varphi(1+e^2cos2\varphi)}{1-e^2} + 2c^3cos^2\psi sin\psi\frac{\rho}{Ncos\varphi} \Longrightarrow$$

$$\frac{dB}{d\varphi} = \frac{-sin2\varphi(1+e^2cos2\varphi)}{1-e^2} + 2(1-e^2)\frac{sin^3\varphi_0}{sin^3\psi_0}\frac{cos^2\psi sin\psi}{cos\varphi(1-e^2sin^2\varphi)} \Longrightarrow$$

$$\left(\frac{dB}{d\varphi}\right)\Big|_{\varphi=\varphi_0} = \frac{-sin2\varphi_0(1+e^2cos2\varphi_0)}{1-e^2} + 2(1-e^2)\frac{sin^3\varphi_0}{sin^3\psi_0}\frac{cos^2\psi_0 sin\psi_0}{cos\varphi_0(1-e^2sin^2\varphi_0)} \Longrightarrow$$

$$\left(\frac{dB}{d\varphi}\right)\Big|_{\varphi=\varphi_0} = \frac{-sin2\varphi_0(1+e^2cos2\varphi_0)}{1-e^2} + (1-e^2)\frac{tg^2\varphi_0}{tg^2\psi_0}\frac{sin2\varphi_0}{1-e^2sin^2\varphi_0} \Longrightarrow$$

$$\left(\frac{dB}{d\varphi}\right)\Big|_{\varphi=\varphi_0} = \frac{-sin2\varphi_0(1+e^2cos2\varphi_0)}{1-e^2} + sin2\varphi_0 = -\frac{4e^2sin\varphi_0cos^3\varphi_0}{1-e^2}$$

Enfin, on arrive au terme $d^3m/d\varphi^3$ avec $\varphi = \varphi_0$ soit :

$$\left(\frac{d^3m}{d\varphi^3}\right)\Big|_{\varphi=\varphi_0} = \frac{\rho_0^2}{N_0^2cos^2\varphi_0}.\frac{-4e^2sin\varphi_0cos^3\varphi_0}{1-e^2} = -\frac{4e^2(1-e^2)sin\varphi_0cos\varphi_0}{(1-e^2sin^2\varphi_0)^2}$$

On obtient donc :

$$m(\varphi) = 1 - \frac{2e^2(1-e^2)sin\varphi_0cos\varphi_0}{3(1-e^2sin^2\varphi_0)^2}(\varphi-\varphi_0)^3 + o((\varphi-\varphi_0)^4)$$

7. On fait intervenir la deuxième excentricité $e'$, avec $e^2 = e'^2/(1+e'^2)$, $1-e^2sin^2\varphi = (1+e'^2cos^2\varphi)/(1+e'^2)$. L'expression de $m(\varphi)$ devient :

$$m(\varphi) = 1 - \frac{2e'^2sin\varphi_0cos\varphi_0}{3(1+e'^2cos^2\varphi_0)^2}(\varphi-\varphi_0)^3 + o((\varphi-\varphi_0)^4)$$

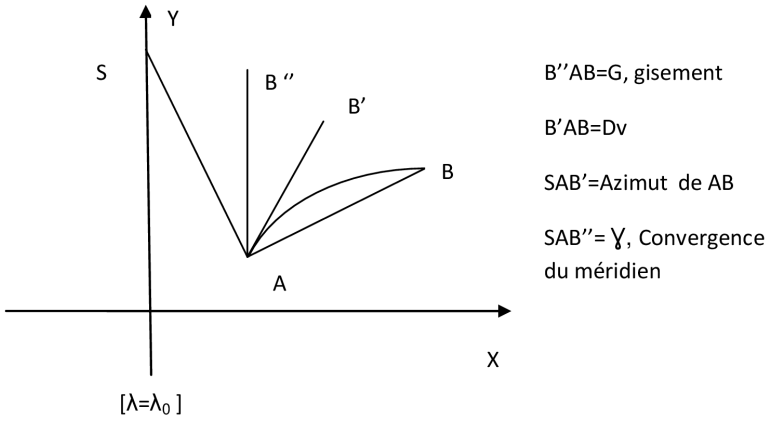



FIGURE 35 – Calcul du gisement de la direction $AB$

## 21.2 La Représentation Lambert

**Correction 55.** En un point $A$ de coordonnées géodésiques $\varphi = 40.9193\,gr$ et $\lambda = 11.9656\,gr$ à l'Est de Greenwich, on vise un point $B$.
1. La latitude du point $A$ est supérieure à $40\,gr = \varphi_0$ latitude du parallèle origine de la représentation plane Lambert-Nord Tunisie, donc le point $A$ se trouve dans la zone du Lambert-Nord Tunisie. Les formules donnant les coordonnées planes $(X, Y)$ en Lambert-Nord Tunisie sont comme suit :

$$\begin{cases} X = 500\,000.00\,m + kRsin\Omega = X_0 + kRsin\Omega \\ Y = 300\,000.00\,m + k(R_0 - Rcos\Omega) = Y_0 + k(R_0 - Rcos\Omega), \quad avec : \\ \Omega = \Omega(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)sin\varphi_0,\ R = R(\varphi) = R_0 exp(-(L - L_0)sin\varphi_0),\ R_0 = N_0 cotg\varphi_0,\ N_0 = a(1 - e^2 sin^2\varphi_0)^{-1/2} \\ L = L(\varphi) = Logtg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) - \frac{e}{2}Log\frac{1 + esin\varphi}{1 - esin\varphi}, \quad L_0 = L(\varphi_0) \\ a = 6378\,249.20\,m,\ e^2 = 0.006\,803\,487\,7,\ k_n = 0.999\,625\,544. \end{cases}$$

Les calculs donnent :

$$\begin{cases} L_0 = L(40.0\,gr) = Logtg\,(50\,gr4 + 20\,gr) - \frac{e}{2}Log\frac{1 + esin40}{1 - esin40} = 0.672\,225\,886\,658 \\ L = 0.627\,382\,113\,620,\ R_0 = 8\,947\,643\,839\,m \Longrightarrow R = 9\,186\,826.157\,m \\ X = 500\,000.00\,m + k_n Rsin\Omega = 500\,000.00 + 81\,871.47 = 581\,871.47\,m \\ Y = 300\,000.00\,m + k_n(R_0 - Rcos\Omega) = 300\,000.00 - 239\,727.80 = 60\,272.20\,m \end{cases}$$

2. Le gisement $G$ de la direction $AB$ (voir **Fig. 35**) est donné par :

$$G = Azg - \gamma + Dv = 55.7631 - (\lambda - \lambda_0)sin\varphi_0 + Dv = 55.7631 - 0.567\,565 + 0.000\,152 = 55.195\,687\,gr$$

3. La distance $AB$ réduite au plan est :

$$D_r = D_e.(1 - 9 \times 10^{-5}) = 5\,421.32 \times 0.999\,91 = 5\,420.83\,m$$

**Correction 56.** 1. D'après les coordonnées de deux points $A$ et $B$, on trouve la distance $D_p = AB = 5\,427.380\,m$. On obtient la distance sur l'ellipsoïde $D_e = D_p(1 - 8 \times 10^{-5}) = 5\,426.946\,m$. La correction du passage de $D_e$ à la distance corde $D_0$ est négligeable $(0.1\,mm)$, on prend $D_0 = D_e = 5\,426.946\,m$.

Pour calculer la distance suivant la pente, on utilise la formule rigoureuse :

$$D_0 = D_P\sqrt{\frac{1-\dfrac{\Delta H^2}{D_P^2}}{\left(1+\dfrac{H_A}{R}\right)\left(1+\dfrac{H_B}{R}\right)}} \Longrightarrow D_P = D_0\sqrt{\frac{\Delta H^2}{D_0^2}+\left(1+\frac{H_A}{R}\right)\left(1+\frac{H_B}{R}\right)}$$

Or $\Delta H = 200\,m$, on obtient numériquement $D_P = 5\,431.565\,m$.

**Correction 57.** On a mesuré une distance suivant la pente $D_P = 20\,130.858\,m$ entre deux points $A$ et $B$ avec $H_A = 235.07\,m$, $H_B = 507.75\,m$, on prendra comme rayon terrestre $R = 6378\,km$.
1. On calcule $D_0$ en utilisant la formule rigoureuse (voir ci-dessus), on obtient $D_0 = 20\,127.839\,m$.
Calculons la correction $C_4$ telle que $D_e = D_0 + C_4$ avec $C_4 = \dfrac{D_0^3}{24R^2} = 0.008\,m$, d'où $D_e = 20\,127.847\,m$.

2. On obtient $D_r = m.D_e = 20\,124.835\,m$.

3. Les coordonnées géodésiques du point $A$ sont : $\lambda = 10.7245\,3\,gr$, $\varphi = 41.4490\,3\,gr$. Par des observations astronomiques, on a déterminé les coordonnées astronomiques $\lambda_a = 10.7257\,4\,gr$ et $\varphi_a = 41.4505\,2\,gr$ du point $A$ et l'azimut astronomique de la direction $AB$ soit $Aza = 89.6849\,9\,gr$.
L'azimut géodésique de la direction $AB$ obtenu par l'azimut astronomique est :

$$\text{Equation de Laplace : } Azg = Aza + (\lambda - \lambda_a).sin\varphi = 89.6849\,9 - 0.0007\,3 = 89.6842\,6\,gr$$

4. Le gisement $G$ de la direction $AB$ est donné par :

$$G = Azg - \gamma + Dv = Azg - (\lambda - \lambda_0)sin\varphi_0 + Dv = 89.6842\,6 - (10.7245\,3 - 11.00)sin40 + 0.0018\,8 = 89.8480\,6\,gr$$

5. Les coordonnées Lambert Nord Tunisie de $B$ sont :

$$\begin{cases} X_B = X_A + D_r sinG = 478\,022.43 + 20\,124.835sin(89.8480\,6) = 497\,891.92\,m \\ Y_B = Y_A + D_r cosG = 444\,702.22 + 20\,124.835cos(89.8480\,6) = 447\,897.87\,m \end{cases}$$

6. L'azimut de $B$ vers $A$ est tel que :

$$Azg_{BA} = G_{BA} + \gamma = G + 200gr + (\lambda_B - \lambda_0)sin\varphi_0 = 289.8480\,6 - 0.0418\,3 = 289.8062\,3\,gr$$

**Correction 58.** On donne deux points $A$ et $B$ dont les coordonnées géodésiques dans le système géodésique Tunisien sont :

$$A\begin{cases} \varphi = 40.4549\,830\,gr \\ \lambda = 9.5954\,2429\,gr \\ h = 742.40\,m \end{cases} \qquad B\begin{cases} \varphi' = 40.3385\,665\,gr \\ \lambda' = 9.4548\,3610\,gr \\ h' = 987.00\,m \end{cases} \tag{21.2}$$

On a mesuré la distance $D_P$ suivant la pente entre $A$ et $B$ soit $D_P = 16\,259.249\,m$.
1. Calculons la distance corde $D_0$ par la formule rigoureuse, $\Delta h = 244.60\,m$, on trouve :

$$D_0 = D_p\sqrt{\frac{1-\dfrac{\Delta h^2}{D_P^2}}{\left(1+\dfrac{h}{R}\right)\left(1+\dfrac{h'}{R}\right)}} = 16\,255.205\,m$$

La correction $C_4 = \dfrac{D_0^3}{24R^2} = +0.004\,m$, d'où $D_e = D_0 + C_4 = 16\,255.209\,m$

2. L'expression du module linéaire $m$ de la représentation Lambert Nord Tunisie est donnée par la formule $m(\phi) = \dfrac{k_n sin\varphi_0 R(\phi)}{N(\phi)cos\phi}$, avec $R = R_0 exp(-(L-L_0)sin\varphi_0)$ et $R_0 = N_0 cotg\varphi_0$, $\varphi_0 = 40\,gr$.

3. Le module linéaire moyen des modules linéaires calculés en $A$ et $B$ est $\overline{m} = \dfrac{1}{2}(m_A + m_B)$. Le calcul donne :

$$\overline{m} = \frac{1}{2}\left(\frac{k_n sin\varphi_0 R(\varphi)}{N(\varphi)cos\varphi} + \frac{k_n sin\varphi_0 R(\varphi')}{N(\varphi')cos\varphi'}\right) = \frac{1}{2}.k_n sin\varphi_0 N_0 cotg\varphi_0 \left(\frac{e^{-L_A sin\varphi_0}.e^{L_0 sin\varphi_0}}{N_A cos\varphi} + \frac{e^{-L_B sin\varphi_0}.e^{L_0 sin\varphi_0}}{N_B cos\varphi'}\right) \Longrightarrow$$

$$\overline{m} = \frac{k_n.cos\varphi_0 e^{L_0 sin\varphi_0}}{2\sqrt{1-e^2 sin^2\varphi_0}}\left(\frac{e^{-L_A sin\varphi_0}\sqrt{1-e^2 sin^2\varphi}}{cos\varphi} + \frac{e^{-L_B sin\varphi_0}\sqrt{1-e^2 sin^2\varphi'}}{cos\varphi'}\right)$$

On rappelle que $L_A = L(\varphi)$, $L_B = L(\varphi')$ et $L_0 = L(\varphi_0) = L(40^{gr})$ avec $L = L(\phi) = Logtg\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\phi}{2}\right) - \dfrac{e}{2}Log\dfrac{1+esin\phi}{1-esin\phi}$. On obtient :

$$L_0 = 0.670\,273\,351, \quad L_A = 0.679\,091\,112\,831, \quad L_B = 0.676\,830\,474$$

Numériquement on obtient :

$$\overline{m} = 0.600\,313\,287\,362 \times (0.832\,607\,761\,877 + 0.832\,598\,294\,091) = 0.9996\,4532$$

4. La distance réduite au plan de la représentation Plane Lambert Nord Tunisie est $D_r = 0.9996\,4532.D_e = 0.9996\,4532 \times 16\,255.209 = 16\,249.444\,m$.

5. Le gisement $G$ de la direction $AB$ vaut $G = Azg - \gamma = Azg - (\lambda - \lambda_0)sin\varphi_0$ avec $\lambda_0 = 11\,gr$. Ce qui donne :

$$G = 249.310\,168 + 0.825\,589 = 250.135\,757\,gr$$

6a. Calculons $(X, Y)$ les coordonnées Lambert Nord Tunisie du point $A$. Les formules sont ci-dessous :

$$\begin{cases} X = 500\,000.00\,m + kRsin\Omega = X_0 + kRsin\Omega \\ Y = 300\,000.00\,m + k(R_0 - Rcos\Omega) = Y_0 + k(R_0 - Rcos\Omega), \quad avec : \\ \Omega = \Omega(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)sin\varphi_0,\ R = R(\varphi) = R_0 exp(-(L-L_0)sin\varphi_0),\ R_0 = N_0 cotg\varphi_0,\ N_0 = a(1-e^2 sin^2\varphi_0)^{-1/2} \\ L = L(\varphi) = Logtg\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\varphi}{2}\right) - \dfrac{e}{2}Log\dfrac{1+esin\varphi}{1-esin\varphi}, \quad L_0 = L(\varphi_0) \\ a = 6378\,249.20\,m,\ e^2 = 0.006\,803\,477,\ k_n = 0.999\,625\,544. \end{cases}$$

Les calculs donnent :

$$\begin{cases} L_0 = L(40.0\,gr) = Logtg\,(50\,gr4 + 20\,gr) - \dfrac{e}{2}Log\dfrac{1+esin40}{1-esin40} = 0.670\,273\,350\,194 \\ L = 0.679\,091\,112\,831,\ R_0 = 8\,789\,242.725\,m \Longrightarrow R = 8\,743\,806.361\,m \\ \Omega = -0.825\,58888\,gr \\ X = 500\,000.00\,m + kRsin\Omega = 500\,000.00 - 113\,346.84 = 386\,653.16\,m \\ Y = 300\,000.00\,m + k(R_0 - Rcos\Omega) = 300\,000.00 + 46\,154.32 = 346\,154.32\,m \end{cases}$$

6b. Les coordonnées Lambert Nord Tunisie $(X', Y')$ du point $B$ à partir de celles de $A$ sont obtenues comme suit :

$$\begin{cases} X' = X + D_r sinG = 386\,653.16 + 16\,249.444 sin(250.135\,757) = 375\,138.59\,m \\ Y' = Y + D_r cosG = 346\,154.32 + 16\,249.444 cos(250.135\,757) = 334\,688.76\,m \end{cases}$$

7a. Calcul direct des coordonnées $(X", Y")$ de $B$ à partir de $(\varphi', \lambda')$. Les calculs donnent :

$$\begin{cases} L_0 = 0.670\,273\,350\,194, \quad R_0 = 8\,789\,242.725\,m \\ L' = 0.676\,830\,473\,905, \Longrightarrow R' = 8\,755\,432.348\,m \\ \Omega' = (\lambda' - \lambda_0)sin\varphi_0 = -0.9082\,2455\,gr \\ X" = 500\,000.00\,m + kR'sin\Omega' = 500\,000.00 - 124\,857.13 = 375\,142.87\,m \\ Y" = 300\,000.00\,m + k(R_0 - R'cos\Omega') = 300\,000.00 + 34\,688.36 = 334\,688.36\,m \end{cases}$$

7b. La comparaison des 2 calculs donne les écarts suivants :

$$\delta X = X" - X' = 4.28\,m, \quad \delta Y = Y" - Y' = -0.40\,m$$

Ces écarts sont dûs certainement aux mesures des distances et de l'adoption du gisement à parir d'un azimut géodésique où on a négligé la correction de la corde.

## 21.3 La Représentation UTM

**Correction 59.** Dans cet exercice, on voudrait justifier l'arrêt à l'ordre 8 de l'expression de $Y(UTM)$ en fonction de $\lambda$. On donne : $\varphi = 40.00\,gr$ et $a = 6\,378\,249.20\,m$, $e^2 = 0.006\,803\,4877$.
1. Calcul des constantes :
- $e'2 = \dfrac{e^2}{1-e^2} = 0.006\,850\,0922$,
- $\eta^2 = e'^2 cos^2\varphi = 0.004\,483\,4436$,
- $t^2 = tg^2\varphi = 0.527\,864\,0450$,
- $N(\varphi) = a(1 - e^2 sin^2\varphi)^{-1/2} = 6\,385\,758.629\,m$.

2. Calculons le coefficient $a_8$ :

$$a_8 = \frac{1}{40320} N cos^7\varphi sin\varphi (165 - 61t^2 + 537t^4 + 9679\eta^2 - 23278t^2\eta^2 + 9244\eta^4 + 358t^4\eta^2 - 19788t^2\eta^4)$$

D'où :

$$\begin{aligned} a_8 = 21.116\,122\,5038.(165 - 32.199\,706\,7450 + 149.629\,921\,6520 + 46.792\,506\,044 \\ -55.090\,847\,8386 + 0.185\,816\,1077 + 0.447\,238\,2097 - 0.209\,965\,2410) \Longrightarrow \\ a_8 = 21.116\,122\,5038 \times 274.554\,962\,1888 = 5\;797.536\,2156 \end{aligned}$$

3. On donne $\lambda = 1.235\,46\,gr = 1.235\,46 \times \dfrac{\pi}{200}\,rd = 0.019\,406\,5602\,rd$, d'où :

$$a_8.\lambda^8 = 5\;797.536\,2156 \times 0.019\,406\,5602^8 = 1,166358337960874608828656196 0847 \times 10^{-7}\,mm$$

On peut conclure que le terme $a_8\lambda^8$ est très négligeable. On s'arrête donc à l'ordre 7 dans le calcul des coordonnées UTM.

**Correction 60.** 1. Calculons les constantes $N, a_1, a_2, a_3, g(\varphi)$ :

$$\begin{cases} N = a(1 - e^2 sin^2\varphi)^{-1/2} = 6\,386\,059.045\,m \\ a_1 = N(\varphi).cos\varphi = 5\,111\,689.850\,m \\ a_2 = \dfrac{a_1}{2}.sin\varphi = 1\,531\,988.877\,m \\ a_3 = \dfrac{a_1 cos^2\varphi}{6}(1 - tg^2\varphi + e'^2.cos^2\varphi) = 545\,853.848 \times 0.443\,626\,2703 = 242\,155.107\,m \\ g(\varphi) = a(1-e^2)(1.0051353.\varphi - 0.0025731 sin2\varphi) = 6\,334\,854.860 \times 0.643\,590\,523 = 4\,077\,052.552\,m \\ \lambda - \lambda_0 = \left(11.9656 - 9 \times \dfrac{200}{180}\right).\dfrac{\pi}{200} = 0.030\,875\,572\,rd \\ (\lambda - \lambda_0)^2_{rd} = 0.000\,953\,301 \quad (\lambda - \lambda_0)^3_{rd} = 0.000\,029\,434 \end{cases}$$

D'où le calcul des coordonnées :

$$X = a_1.(\lambda-\lambda_0)+a_3.(\lambda-\lambda_0)^3 = 5\,111\,689.850\times 0.030\,875\,572 + 242\,155.107\times 0.000\,029\,434 \Longrightarrow$$
$$X = 157\,833.476 = \mathbf{157\,833.48\ m}$$
$$Y = g(\varphi)+a_2.(\lambda-\lambda_0)^2 = 4\,077\,052.552 + 1\,531\,988.877\times 0.000\,029\,434 \Longrightarrow$$
$$Y = 4\,078\,512.998\,m \approx \mathbf{4\,078\,512.97\ m}$$

On retrouve aux erreurs $(3cm)$ près les coordonnées proposées du point $A$.

2. Soit le point $B$ de coordonnées $(X' = 160\,595.98\,m; Y' = 4\,078\,564.53\,m)$. Sachant que $B$ est situé sur le même parallèle que $A$, il s'ensuit $\varphi_B = \varphi_A = \varphi$. De l'expression de l'ordonnée $Y_B$ du point $B$, on a l'équation :

$$Y_B = g(\varphi)+a_2.(\lambda'-\lambda_0)^2 \Longrightarrow \lambda' = \lambda_0 + \sqrt{\frac{Y_B - g(\varphi)}{a_2}} \Longrightarrow$$
$$\lambda' = 10\,gr + \sqrt{\frac{4\,078\,564.53 - 4\,077\,052.552}{1\,531\,988.877}}\times\frac{200}{\pi} = 10 + 1.999\,98 = 11.999\,98\,gr$$

3. Calcul du gisement $G$ et la distance $AB$ :

$$X'-X = 2\,762.50\,m,\quad Y'-Y = 51.56\,m \Longrightarrow tgG = \frac{X'-X}{Y'-Y} = \frac{2\,762.50}{51.56} = 53,578\,355 \Longrightarrow G = 98.811\,934\,gr$$
$$D = \sqrt{(X'-X)^2+(Y'-Y)^2} = 2\,762.981\,m$$

4-5. Calculons les convergences des méridiens aux points $A$ et $B$. $\lambda-\lambda_0$ et $\lambda'-\lambda_0$ sont des petites valeurs, par suite la convergence des méridiens est donnée par $\gamma = (\lambda-\lambda_0)sin\varphi$, d'où :

$$\gamma_A = (\lambda-\lambda_0)sin\varphi = 1.178\,19\,gr$$
$$\gamma_B = (\lambda'-\lambda_0)sin\varphi = 1.1988\,gr$$

On obtient les azimuts géodésiques de $A \longrightarrow B$ et de $B \longrightarrow A$ :

$$Azg_{AB} = G + \gamma_A = 98.811\,934 + 1.178\,19 = 99.990\,124\,gr$$
$$Azg_{BA} = G + 200\,gr + \gamma_B = 298.811\,934 + 1.1988 = 300.010\,734\,gr$$

6. En calculant les coordonnées UTM de $A$ et $B$, on trouve respectivement $X_A = 657\,770.34\,m$, $Y_A = 4\,076\,891.20\,m$; $X_B = 660\,531.74\,m$, $Y_B = 4\,076\,942.76\,m$.
Le calcul de la distance $AB$ par les coordonnées UTM donne :

$$D' = \sqrt{(660\,531.74-657\,770.34)^2+(4\,076\,942.76-4\,076\,891.20)^2} = 2761.881\,m$$

D'où l'estimation de l'erreur relative sur la distance en utilisant les coordonnées de l'UTM tronquée :

$$\frac{\Delta D}{D} = \frac{D'-D}{D} = \frac{2761.881-2762.981}{2762.981} = \frac{-1.1}{2762.981} = -3.98\times 10^{-4} \approx 4.10^{-4}.m$$

# 22 Bibliographie

**1. F.R. Helmert**. 1884. *Die Mathematischen und Physikalischen Theorien der Höheren Geodäsie* ; Vol 2, Leibzig, B.G Teubner(reprinted 1962).

**2. H. Poincaré**. 1905. Sur les Lignes géodésiques des surfaces convexes. Transactions of the American Mathematical Society. *n*°6, pp. 237-274 ; Œuvres 6, pp. 38-84.

**3. F. Tisserand & H. Andoyer**. 1912. *Leçons de Cosmographie*. 6ème édition. Librairie Armand Colin. 396p.

**4. G. Julia**. 1955. Cours de l'Ecole Polytechnique. *Cours de Géométrie Infinitésimale*. Cinquième Fascicule, Deuxième Partie : Théorie des Surfaces. Deuxième édition entièrement refondue. Editeur Gauthier-Villars. 141p.

**5. W.A. Heiskanen & H. Moritz**. 1967. *Physical Geodesy*. Freeman, San Francisco. Reprint, 1979. Institute of Physical Geodesy, Technical University, Graz, Austria. 364p.

**6. J. Dieudonné**. 1968. *Calcul Infinitésimal*. 1ère édition. Collection Les Méthodes. Hermann, Paris. 479p.

**7. A. Fontaine**. 1969. Rapport sur la Géodésie de la Tunisie. OTC.

**8. C.A.C.G.G. (le Comité Associé Canadien de Géodésie et de Géophysique)**. 1973. Canadian Surveyor, Vol 27, *n*°3.

**9. A. Marussi**. 1974. Africa and Modern Geodesy. Proceedings of the First Symposium in Geodesy in Africa, 14-19 January. Khartoum. Soudan.

**10. B. Morando**. 1974. *Mouvement d'un Satellite Artificiel de la Terre*. Gordon & Breach, Paris, London et New York. 255p.

**11. L. Bers**. 1977. Quasiconformal mappings, with applications to differential equations, function theory and topology. Bulletin of the American Mathematical Society, vol 83, *n*°6, pp. 1083-1100, 1977.

**12. C. Fezzani**. 1979. Analyse de la structure des réseaux astro-géodésiques tunisiens. Thèse de Docteur Ingénieur. Ecole Nationale des Sciences Géographiques. IGN France. 314p.

**13. C. Boucher**. 1979a. Systèmes géodésiques de référence et autres problèmes géodésiques liés à la localisation en mer. Colloque national sur la localisation en mer. Brest, 1-5 octobre 1979. IGN France.

**14. C. Boucher**. 1979b. Les Transformations géométriques entre systèmes géodésiques. Rapport Technique RT/G *n*°3, SGNM, IGN France.

**15. P. Dombrowski**. 1979. 150 Years after Gauss " disquisitiones generales circa superficies curvas". Astérisque *n*°62. Publication de la Société Mathématique de France. 153p.

**16. H.M. Dufour**. 1979. Systèmes de références : Systèmes Projectifs. Conférence présentée au Colloque national sur la Localisation en mer. Brest, 1-5 octobre 1979. 27p.

**17. H. Monge**. 1979. L'ellipsoïde de Clarke 1880. Bulletin d'Information de l'IGN France *n*°39-1979/3, pp. 37-38.

**18. J. Lemenestrel**. 1980. *Cours de Géodésie Elémentaire*, ENSG, IGN France.

**19. J. Commiot**. 1980. *Cours de Cartographie Mathématique*, ENSG, IGN France.

**20. A. Danjon**. 1980. *Astronomie Générale : Astronomie sphérique et Eléments de mécanique céleste*. Seconde édition, revue et corrigée. Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard. 454p.

**21. B. Doubrovine, S. Novikov et A. Fomenko**. 1982. *Géométrie Contemporaine : Méthodes et Application*. Première Partie : Géométrie des surfaces, des groupes de transformations et des champs. Edition Mir, Moscou. 438p.

**22. M. Charfi**. 1983. Les Travaux de revalorisation de la Géodésie Tunisienne. OTC.

**23. P. Vaníček & E.J. Krakiwsky**. 1986. *Geodesy : the Concepts*. North Holland Compagny. 2ème Edition. 697p.

**24. Defense Mapping Agency(DMA)**. 1987a. DMA Technical Report 8350.2. Dept of Defense, World Geodetic System 1984, Its definition and relationships with local geodetic systems. 121p.

**25. Defense Mapping Agency**. 1987b. DMA Technical Report 8350.2-A. Part I : Methods, Techniques, and Data used in WGS84 development. Supplement to Department of Defense World Geodetic System 1984 Technical Report. 412p.

**26. Defense Mapping Agency**. 1987c. DMA Technical Report 8350.2-A. Part II : Parameters, formulas, and graphics for the practical application of WGS84. Supplement to Department of Defense World Geodetic System 1984 Technical Report. 775p.

**27. H. Moritz & I.I. Mueller**. 1988. *Earth Rotation :Theory and Observation*. Ungar Publishing Compagny. New York. 617p.

**28. B. Hofmann-Wellenhof, H. Lichtenegger et J. Collins**. 1992. *Global Positioning System, Theory and Practice*. Springer-Verlag Wien New York. 382p.

**29. M. Burša & K. Pič**. 1993. *Gravity Field and Dynamics of the Earth*. Springer-Verlag. 385p.

**30. Publications de l'Académie Bavaroise de Géodésie, *n*°58**. 1997. Symposium de la Commission EUREF, Sofia, 4-7 juin 1997. Extrait du rapport présenté par la Suisse. pp. 212-218.

**31. T. Soler**. 1998. A Compendium of transformation formulas useful in GPS work. Journal of Geodesy, Vol.72, *n*°7/8, pp. 482-490.

**32. E.W. Grafarend**. 1998. Helmut Wolf : Das Wissenschaftliche Werk/ The Scientific Work. Publication de la Deutsche Geodätische Kommission bei der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, Reihe A, Heft *n*°115, München 1998. 97p.

**33. P. Petersen**. 1998. *Riemannian Geometry*. Graduate Texts in Mathematics, *n*°171. Springer-Verlag. 435p.

**34. A. Ben Hadj Salem**. 1999. La Mise à niveau de la Géodésie Tunisienne par l'unification Carthage2000 de ses réseaux, présentée au Premier Atelier Maghrébin de Géodésie. Tunis, 18-20 mai 2000. Publiée dans la revue Géo-Top de l'OTC numéro spécial mai 2000, pp. 6-16.

**35. A. Ben Hadj Salem**. 1999. Note sur les comparaisons des azimuts géodésiques du réseau géodésique primordial Tunisien. 5p.

**36. H. Moritz**. 2000. Geodetic Reference System 1980. Journal of Geodesy, vol. 74 *n*°1, pp. 128-134.

**37. A. Ben Hadj Salem**. 2001. Contrôle de l'azimut d'orientation du système géodésique tunisien Carthage34. Publié dans la revue Géo-Top de l'OTC, *n*°4 février 2002, pp. 63-68.

**38. H.A. Kastrup**. 2008. On the Advancements of Conformal Transformations and their Associated Symmetries in Geometry and Theoretical Physics. arxiv :http ://arxiv.org/physics.hist-ph/0808.2730v1. www.arxiv.org 82p.

**39. Arrêté du ministre de la Défense nationale du 10 février 2009**. 2009. Journal Officiel de la République Tunisienne *n*°14 du 17 février 2009.

**40. A.N. Pressley**. 2010. *Elementary Differential Geometry*. Springer-Verlag Heidelberg. 395p.

**41. M. Lemmens**. 2011. *Geo-information : Technologies, Applications and the Environment*. Series Geotechnologies and the Environment. Volume 5. Springer Netherlands. 349p.

**42. E. Zeidler**. 2011. *Quantum Field Theory III : Gauge Theory A Bridge Between Mathematicians and Physicists*. Springer-Verlag Heidelberg. 1158p.

**43. A. Ben Hadj Salem**. 2012. Selected Papers. Tome II. pp 165-172.

**44. A. Ben Hadj Salem**. 2013. Histoire de la Topographie en Tunisie : Les Coordonnées Origines Fuseaux. 11p.

**45. United Nations Commitee of Experts on Global Geospatial Information Management (UN-GGIM)**. 2015. La Résolution adoptée par l'Assemblée générale le 26 février 2015. www.ggim.un.org/docs/A_RES_69_266_F.pdf. 3p.

**46. A. Ben Hadj Salem**. 2017. Eléments de Géodésie et de la Théorie des Moindres Carrés - Pour les Elèves-Ingénieurs Géomaticiens. Noor Publishing. 1ère Edition, *ISBN* : 978−3−330−96843−1. 364p.

**47. A. Ben Hadj Salem**. 2019. A Note of Differential Geometry. 10p. www.vixra.org/pdf/1903.0241v1.pdf

**48. J.M. Ortega & W.C. Rheinboldt**. 1970. *Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables*. Academic Press. 527p.

**49. A. Bjerhammer**. 1973. *Theory of Errors and Generalized Matrix Inverses*. Elsevier Scientific Publishing Compagny. Amsterdam. 420p.

**50. H. Cartan**. 1979. *Cours de Calcul Différentiel*. Nouvelle édition refondue et corrigée. Hermann Paris. Collection Méthodes. 365p.

**51. P. Hottier**. 1980. *Théorie des Erreurs*. Ecole Nationale des Sciences Géographiques. IGN France. 81p.

**52. A. Pázman**. 1984. Probability distribution of the multivariate nonlinear least-squares estimates. Kybernetika *n*°20, pp. 209-230.

**53. S.S Chern**. 1985. Moving Frames. Société Mathématique de France. Astérisque, numéro hors série "Elie Cartan et les mathématiques d'aujourd'hui". Lyon, 25-29 juin 1984. p 67-77.

**54. P.J.G. Teunissen**. 1985. *The Geometry of Geodetic Inverse Linear Mapping and Non-Linear Adjustment*. Publications on Geodesy, *n*°1, Volume 8, Netherlands Geodetic Commission. 177p.

**55. E.W. Grafarend & B. Schaffrin**. 1989. The Geometry of non-linear adjustment - the planar trisection problem. *FESTCHRIFT to TORBEN KRARUP* edited by E. Kejlo, K. Poder and C.C. Tscherning. Geodætisk Institut, Meddelelse *n*°58, pp. 149-172. København, Danmark.

**56. P.J.G. Teunissen**. 1990. Nonlinear least squares. Manuscripta Geodaetica, Vol 15, *n*°2, pp. 137-150.

**57. S. Amari & H. Nagaoka**. 2000. *Methods of Information Geometry*. Traduit du japonais par Daishi Harada. Translations of Mathematical Monographs, Vol 191. Oxford University Press. AMS. 206p.

**58. C. Brezinski**. 2005. La Méthode de Cholesky. Revue d'Histoire des Mathématiques, publication de la Société Mathématique de France. Vol 11 (2005), pp. 205-238.

**59. P.J. Olver**. 2013. *Nonlinear Systems*. 58p. Université de Minnesota.

**60. J.P. Snyder & P.M. Voxland**. 1989. *An Album of Map Projections*. U.S. Geological Survey Professional Paper 1453, Littrow projection, page 155. United States Government Printing Office : 1989 ; 260 pages.